Iranian Journal of curriculum studies

ISSN: 1735-4986
https://www.jcsicsa.ir

VOL (21), No. 81, 2026, pp: 155-178

Analyzing Mathematics Teachers' Approaches to Psychological Tools in Teaching the Concept of Equation: A Phenomenographic Study

Fatemeh. Mirzaei[*, 1], **Abolfazl. Rafiepour**[2]

1. ***Corresponding author***, Department of Mathematics Education, Farhangian University, Tehran, Iran, f.mirzaei@cfu.ac.ir
2. Department of Mathematics Education, Faculty of Mathematics and Computer, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran & Mahani Math Center, Afzalipour Research Institute, Shahid Bahonar University of Kerman, Iran, rafiepour@uk.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Keywords: Concept of equality, equation, mathematics teacher, psychological tools, phenomenography.

ABSTRACT

The aim of this study is to explain the role of psychological tools in teaching the concept of equality and equation and to bridge the gap between theories of cognitive mediation and educational practice in the classroom. The study was conducted using a qualitative phenomenographic approach with the participation of fourteen seventh-grade mathematics teachers in Kerman, selected through purposive sampling. Data were collected through semi-structured interviews and analyzed using the Dahlgren and Fallsberg method; validity was ensured through participant review and reliability was confirmed by comparison with a phenomenography specialist. Findings showed that teachers used four categories of mediating tools: language, bodily movements, symbols, and educational artifacts. Language appeared in three roles: activating thinking, guiding step by step, and stabilizing meaning through metaphors; bodily movements acted as a bridge between sensory and symbolic experience; symbols consolidated algebraic relations; and artifacts were used less frequently. The conclusion indicated that teaching equations is a multifaceted and semiotic process. The novelty of this study lies in combining phenomenography with a semiotic framework and focusing on teachers' experiences.

Article history:
Received: 27 December 2025
Reviewed: 21 February 2026
Accepted: 25 April 2026

Citation (APA): Mirzae, F. , Rafiepour, A. (2026). Analyzing Mathematics Teachers' Approaches to Psychological Tools in Teaching the Concept of Equation: A Phenomenographic Study. Iranian Journal of curriculum studies. 21 (81), 155-178 https://doi.org/ 10.22034/jcs.2026.567931.2554

© The Author(s).
Publisher: Iranian Curriculum Studies Association.

Extended Abstract

Introduction

Algebraic concepts play an essential role in the school mathematics curriculum, among which equations and equation solving occupy a central place, as students are inevitably required to formulate and solve equations in mathematics and other sciences. However, research indicates that many students encounter serious difficulties in understanding and solving equations, highlighting the necessity for further research to promote the conceptual understanding of equations. Furthermore, the concept of equality is one of the most fundamental relationships in mathematics, representing the equivalence of two quantities. Scholars caution that the mere repetition of the equals sign in students' mathematical experiences does not guarantee correct comprehension, and merely stating the verbal meaning of the equals sign to students cannot lead to deep understanding. Despite these emphases, most existing studies have predominantly focused on diagnosing students' conceptual errors or the effectiveness of instructional interventions at the content level. What has received less attention is the role of psychological tools, such as bodily gestures (or pointing actions), symbols, and educational artifacts. Within Vygotsky's socio-cultural framework and the sign-internalization perspective, these tools play a central role in the learning process, the transition from concrete experience to abstract thinking, and the development of higher mental functions. The understanding of the equals sign and algebraic concepts is not acquired merely through numerical exercises; rather, it is progressively constructed through social interaction, discourse, visual signs, and bodily gestures. Accordingly, curriculum studies emphasize the importance of a socio-cultural approach in mathematics education to comprehend the contextual and processual dimensions of learning. Nonetheless, few studies have empirically investigated what types of psychological tools mathematics teachers use in practice and how they employ them in teaching the concepts of equivalence and equations.

Methodology

This study was conducted using a phenomenographic approach based on Marton's (1981) conceptual framework to describe the qualitatively different ways teachers experience and perceive the phenomenon of utilizing psychological tools in teaching the concepts of equality and equations. Participants comprised 14 seventh-grade mathematics teachers with diverse teaching experience (5 to 27 years), educational degrees (Bachelor's to Ph.D.), and genders, selected through purposeful sampling until theoretical saturation was attained. Data were gathered through semi-structured interviews (11 face-to-face and 3 virtual, each lasting 45 to 60 minutes) focusing on actual teaching situations and classroom practices. Data analysis was carried out following the seven-step model of Dahlgren and Fallsberg (1991), which entailed familiarization, condensation of meaning units, comparison, grouping into initial categories, labeling, and contrastive comparison to establish the outcome space. Trustworthiness was ensured through member-checking (credibility) and debriefing with an expert in phenomenography to reach consensus on the final categories (dependability).

Results

Data analysis identified eight descriptive categories in teachers' experiences:

1. Linguistic tools appeared in three roles: "activating thinking and introducing the concept," "step-by-step guiding language," and "metaphorical and meaning-stabilizing language" (metaphors of the balance scale, wall, or detective).
2. Bodily tools emerged under "the body as a mediating tool in meaning-making," where deictic gestures and hand simulations acted as the sprouting of sensorimotor signs to objectify equivalence.

3. Symbolic tools were identified in two categories: “objectifying visual symbols” and “stabilizing algebraic symbols.”
4. Artifactual tools appeared in two roles: “artifacts as meaning-making tools” and “supporting tools in deepening meaning,” although they were used less frequently. Overall, findings revealed that teaching equations is a continuous path from sensorimotor intuition toward symbolic formalization.

Discussion

Interpreted through Vygotsky’s socio-cultural theory and Radford’s theory of semiotic objectification, the findings demonstrate that teaching the concepts of equality and equations is an inherently multimodal and semiotic process mediated through language, bodily gestures, symbols, and artifacts. Bodily gestures operated as semiotic bridges between sensorimotor experiences and symbolic abstraction—serving as primordial signs that evolve into formal mathematical notation. Furthermore, the instructional efficacy of metaphorical language was contingent upon preserving structural isomorphism with mathematical concepts (e.g., the balance scale metaphor), whereas purely verbal or non-structural analogies risked reinforcing algorithmic execution and persistent misconceptions. Symbols successfully objectified situated relationships into stable, communicable structures, provided teachers refrained from reifying symbols as concrete physical objects. The contribution of this study lies in bridging phenomenography with a semiotic framework to illuminate how psychological tools are experienced in practice, while exposing a palpable theory-practice gap in the underutilization of manipulative artifacts. Methodologically, the study is bounded by its specific geographical sample of seventh-grade teachers, reliance on retrospective semi-structured interviews, and the absence of direct classroom video observations and student perspectives. Future studies are encouraged to employ multimodal video analyses and investigate students’ experiences to deepen empirical insights into semiotic mediation in mathematics classrooms.

Ethical Considerations

In conducting this research, all ethical standards and principles of research ethics were observed, and participants were assured that their personal information would remain confidential and that the results would be used solely for research purposes.

Author Contributions

The authors contributed equally to all stages of the research and the writing of the manuscript.

Acknowledgments

This article was not extracted from any research project or academic thesis, and all expenses were funded by the authors. The authors sincerely thank all the esteemed teachers who kindly cooperated in the interview process by participating in this research and dedicating their valuable time.

Conflict of Interest

The authors declare that they have no conflict of interest.

AI Disclosure Statement

The authors declare that no artificial intelligence tools or generative language models were used in the writing, data analysis, or preparation of the results of this article.

مطالعات برنامه درسی

شاپا: ۱۷۳۵-۴۹۸۶

https://www.jcsicsa.ir

دوره ۲۱، شماره ۸۱، تابستان ۱۴۰۵: ۱۷۸ -۱۵۵

واکاوی رویکردهای معلمان ریاضی به ابزارهای روانشناختی در تدریس مفهوم معادله: یک مطالعه پدیدارنگاری

فاطمه میرزائی*[۱]، ابوالفضل رفیع‌پور[۲]

۱. *نویسنده مسئول*، گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران. f.mirzaei@cfu.ac.ir

۲. بخش آموزش ریاضی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر، کرمان، ایران و پژوهشکده ریاضی ماهانی، پژوهشگاه افضلی پور، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران. rafiepour@uk.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:

مقاله اصیل پژوهشی

کلیدواژه‌ها: مفهوم تساوی، معادله، معلم ریاضی، ابزارهای روان‌شناختی، پدیدارنگاری

تاریخچه مقاله:

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۱/۰۱

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۵/۰۴/۰۷

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۴/۱۷

چکیده

هدف این مقاله، تبیین نقش ابزارهای روان‌شناختی در آموزش مفهوم تساوی و معادله و پر کردن شکاف میان نظریه‌های میانجی‌گری شناختی و عمل تربیتی در کلاس درس است. مطالعه با رویکرد کیفی و پدیدارنگاری و با مشارکت چهارده معلم ریاضی پایه هفتم در شهر کرمان که با روش نمونه‌گیری هدفمند انتخاب شدند، انجام شد. داده‌ها از طریق مصاحبه‌های نیمه‌ساختاریافته گردآوری و با روش دالگرن و فالسبرگ تحلیل شدند؛ قابلیت اعتبار با بازبینی مشارکت‌کنندگان و قابلیت اطمینان با مقایسه‌ی متخصص پدیدارنگاری تأیید شد. یافته‌ها نشان دادند که معلمان از چهار دسته ابزار میانجی‌گر شامل زبان، حرکات بدنی، نمادها و مصنوعات آموزشی بهره می‌گیرند. زبان در سه نقش فعال‌سازی ذهن، هدایت پله‌ای و تثبیت استعاری معنا ظاهر شد؛ حرکات بدنی پل میان تجربه‌ی حسی و نمادین بودند؛ نمادها روابط جبری را تثبیت کردند و مصنوعات کمتر استفاده شدند. نتیجه‌گیری نشان داد آموزش معادله فرایندی چندوجهی و نشانه‌ای است. نوآوری پژوهش در ترکیب رویکرد پدیدارنگاری با چارچوب نشانه‌شناختی و تمرکز بر تجربه‌ی معلمان نهفته است.

استناد به این مقاله: میرزائی، فاطمه؛ رفیع‌پور، ابوالفضل. (۱۴۰۵). واکاوی رویکردهای معلمان ریاضی به ابزارهای روانشناختی درتدریس مفهوم معادله: یک مطالعه پدیدارنگاری. **فصلنامه مطالعات برنامه درسی ایران.** ۲۱ (۸۱)، ۱۷۸– ۱۵۵. https://doi.org/10.22034/jcs.2026.567931.2554

© نویسندگان

ناشر: **انجمن مطالعات برنامه درسی ایران.**

مقدمه

مفاهیم جبری نقش مهمی در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای دارند. در میان آن‌ها، معادلات و حل آن‌ها جایگاه محوری دارند (Schliemann et al., 2013). در ریاضی و علوم دیگر مانند فیزیک و شیمی دانش‌آموزان، ناگزیرند معادلات را بسازند و حل کنند. از این‌رو برخورداری از درک مفهومی مناسب از معادله ضروری است. با این حال، پژوهش‌ها نشان می‌دهند بسیاری از دانش‌آموزان در فهم و حل معادلات با دشواری‌های جدی مواجه‌اند(Bajwa & Perry, 2021; Tossavainen et al., 2011). این مسئله ضرورت پژوهش‌های بیشتر در زمینه ارتقای درک مفهومی معادلات را برجسته می‌سازد.

مفهوم تساوی یکی از بنیادی‌ترین روابط در ریاضیات است. رابطه‌ی $A = B$ بیانگر برابری دو مقدار است، حتی اگر نمایش‌های متفاوتی داشته باشند. پژوهشگران هشدار می‌دهند که معلمان در دوره‌های ابتدایی و متوسطه باید به‌طور منظم بر معنای علامت مساوی و ساختار معادله تمرکز کنند، چرا که تکرار صرفِ نماد مساوی در تجربیات ریاضی دانش‌آموزان، تضمین‌کننده درک صحیح آن نیست. این امر مستلزم تمرکز مداوم بر علامت تساوی و ساختار معادله در برنامه‌های توسعه حرفه‌ای معلمان است. بویژه آنکه تحقیقات نشان داده‌اند که صرفاً بیان زبانی معنای علامت مساوی به دانش‌آموزان نمی‌تواند به درک عمیق آن منجر شود (Stephens et al., 2013, p. 181).

با وجود این تأکیدها، اکثر مطالعات موجود عمدتاً بر شناسایی خطاهای مفهومی دانش‌آموزان (Carpenter et al., 2003; Stephens et al., 2013; Faramarzpoor & Fadaee, 2021) یا اثربخشی مداخلات آموزشی در سطح محتوا (Matthews & Rittle- Johnson, 2009) متمرکز بوده‌اند. آنچه کمتر مورد توجه قرار گرفته، نقش ابزارهای روان‌شناختی همچون زبان،حرکات اشاره‌ای (کنش‌های بدنی یا اشاره)[1]، نمادها و مصنوعات آموزشی است. ابزارهایی که در چارچوب دیدگاه اجتماعی-فرهنگی ویگوتسکی و گسترش های بعد از آن نقش اصلی در فرایند یادگیری و گذار از تجربه عینی به تفکر انتزاعی محسوب می‌شوند و بستر شکل‌گیری کارکردهای عالی ذهنی را فراهم می‌کنند (Vygotsky, 1978; Wertsch, 1985; Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Radford, 2003, 2009, 2022). با این حال، پژوهش‌های اندکی بررسی کرده‌اند که معلمان ریاضی در عمل، از چه نوع ابزارهایی و به چه شیوه‌ای، در تدریس مفاهیم تساوی و معادله بهره می‌گیرند. بنابراین، پژوهش حاضر با تمرکز بر تجربه‌ی معلمان پایه‌ی هفتم و با اتخاذ رویکرد پدیدارنگاری، در پی آن است که به این پرسش پاسخ دهد که معلمان ریاضی از چه ابزارهای روان‌شناختی و چگونه در آموزش مفهوم تساوی و حل معادله استفاده می‌کنند؟

پیشینه پژوهش

مطالعات آموزش ریاضی ادراک دانش‌آموزان از علامت تساوی را در سه سطح متمایز طبقه‌بندی می‌کنند: سطح عملیاتی (رویه‌ای) که در آن علامت تساوی صرفاً فرمانی برای انجام محاسبات عددی تلقی می‌شود. سطح رابطه‌ای-محاسباتی که در آن دانش‌آموز برابری دو طرف را تشخیص می‌دهد اما برای اثبات آن به محاسبه کامل طرفین اتکا می‌کند و سطح رابطه‌ای-ساختاری که در آن دانش‌آموز بدون نیاز به محاسبه، تساوی را به عنوان رابطه‌ای هم‌ارز و ساختاری میان مقادیر درک می‌کند (Stephens et al., 2013).

با این حال، مطالعات گسترده نشان داده‌اند که دانش‌آموزان غالباً علامت تساوی را به‌صورت رویه‌ای و محاسباتی تفسیر می‌کنند، نه به‌عنوان رابطه‌ای ساختاری میان دو طرف (Kieran, 1981; McNeil et al., 2006). پژوهش‌هایی مانند Carpenter et al. (2003) و Stephens et al. (2013) نشان داده‌اند که برداشت رویه‌ای از تساوی حتی در معادلات ساده نیز مشکل‌ساز است. در مقابل، دانش‌آموزانی که معنای رابطه‌ای تساوی را درک می‌کنند، قادرند ساختار معادله را تحلیل کرده و روابط بین

1.Gestures

اجزا را تشخیص دهند (Rittle-Johnson et al., 2011). از این‌رو، پژوهشگران بر لزوم مداخلات آموزشی هدفمند برای تقویت درک رابطه‌ای تساوی تأکید کرده‌اند (Matthews & Rittle-Johnson, 2009; Jones et al., 2012).

در همین زمینه، مطالعات متعددی به بررسی چالش‌های مفهومی دانش‌آموزان در یادگیری معادلات پرداخته‌اند. Amini-Far & Karimi-Kia (2014) نشان دادند که ضعف در درک ساختار معادله عمدتاً ناشی از غلبه رویکردهای رویه‌ای در تدریس است. آن‌ها بر استفاده از نمایش‌های متنوع و فعالیت‌های معنادار برای تقویت درک رابطه‌ای تأکید کردند. در این میان، پژوهش‌های تجربی نقش ابزارهای دیداری–دست‌کاری‌پذیر را در تسهیل گذار به درک رابطه‌ای تساوی برجسته کرده‌اند؛ ابزارهایی مانند ترازوی پویا یا فیزیکی که بازنمایی بصری تعادل (جنبه دیداری) را با جابه‌جایی مقادیر (جنبه دست‌کاری‌پذیر) پیوند می‌زنند. Bajwa & Perry (2021) نشان دادند که استفاده از ترازوی دوکفه‌ای پویا می‌تواند توجه دانش‌آموزان را از محاسبه صرف به درک رابطه‌ای تساوی معطوف کند. همچنین Stephens et al. (2022) دریافتند که کار با ترازوی تعادلی در فعالیت‌های مشارکتی به شکل‌گیری تدریجی درک ساختاری از معادله و تقویت استدلال عددی و نمادین منجر می‌شود. در پژوهشی دیگر معلمان ریاضی گزارش کردند که دانش‌آموزان در درک متغیرها، حل مسائل چندمرحله‌ای و تمایز نمادها با دشواری مواجه‌اند و استفاده از ابزارهای بصری برای تقویت درک مفهومی پیشنهاد دادند (Bosque 2025).

فراتر از ابزارهای فیزیکی و نرم‌افزاری، نظریه‌پردازان نشانه‌شناسی بر نقش تعامل و ابزارهای میانجی تأکید دارند. در یک مطالعه تجربی Radford (2022) نشان داد که معناهای جبری از دل فعالیت‌های گروهی، گفت‌وگوها و کار با ابزارهای دیداری شکل می‌گیرند. در این پژوهش، دانش‌آموزان با کمک دو سیستم نشانه‌ای دیداری– ملموس[1]، توانستند مسائل کلامی را به شکل‌های تصویری تبدیل کنند و به‌تدریج مفهوم تساوی و ساختار معادله را درک کنند. تحلیل روند یادگیری آن‌ها نشان داد که فهم علامت مساوی، تنها از طریق تمرین‌های عددی به دست نمی‌آید، بلکه در تعامل با دیگران و با استفاده از نشانه‌های گفتمانی و دیداری، به مرور ساخته می‌شود. این مطالعه تأکید می‌کند که برای آموزش معادله، استفاده از ابزارهای میانجی‌گر و ایجاد فضای مشارکتی و معنادار، نقش مهمی در درک عمیق مفاهیم دارد. او همچنین در مطالعه‌ی دیگر، با بررسی دقیق ویدئوهای کلاس‌های درس نشان داد که دانش‌آموزان تنها از زبان برای بیان مفاهیم استفاده نمی‌کنند، بلکه از حرکات دست و بدن و دیگر روش‌های حسی نیز کمک می‌گیرند. او معتقد است این حرکات و ابزارهای غیرکلامی نقش مهمی در تفکر و فهم مفاهیم جبری دارند و به شکل‌گیری معانی در یادگیری کمک می‌کنند. بنابراین، توجه به ابزارهای میانجی‌گر مانند حرکات اشاره‌ای می‌تواند در آموزش بهتر مفاهیم ریاضی مؤثر باشد (Radford, 2003). درامتداد این دیدگاه، پژوهش‌های متعددی نقش ابزارهای آموزشی و میانجی‌گری نشانه‌ای را در بهبود یادگیری ریاضی تأیید کرده‌اند. Maffia et al. (2013) نشان داده‌اند که استفاده هدفمند از مصنوعات آموزشی مانند نرم‌افزارها و ابزارهای تعاملی، فرایند معناسازی را تسهیل می‌کند. آن‌ها تأکید کردند که طراحی فعالیت‌های مناسب توسط معلم، نقش کلیدی در تبدیل مصنوعات به نشانه‌های معنادار دارد. Bartolini Bussi & Mariotti (2008) نیز با معرفی چارچوب میانجی‌گری نشانه‌ای

---

۱. Radford (2022, P. 1155) این دو بستر را با عنوان کلی Visual Concrete Semiotic Systems معرفی می‌کند. سیستم نخست، **سیستم نشانه‌ای ملموس**(Concrete Semiotic System - Css) است که در آن از اشیای عینی شامل «پاکت‌های کاغذی» برای بازنمایی مجهول، «کارت‌های مقوایی» برای بازنمایی کمیت‌های معلوم و کارت «علامت تساوی» استفاده می‌شود. سیستم دوم، **سیستم نشانه‌ای تصویری** (Iconic Semiotic System - Iss) است که در آن همان اشیا و عملیات ریاضی به‌صورت ترسیم‌های دوبعدی و علامت‌گذاری با فلش روی کاغذ/تابلو بازنمایی می‌شوند.

تـأکیـد می‌کننـد که هدایت معلم در به‌کارگیری ابزارها، نقش کلیدی در درک عمیق‌تر مفاهیم ریاضـــی دارد. افزون بر این، (Reeve & Reynolds, 2001) در فصـل دهم از مجموعه گردآوری‌شـده توسـط دیوید کلارک نشـان داده‌اند که حرکات اشـاره‌ای به‌عنوان ابزارهای میانجی، بستر تفسیری لازم را برای گفتار ریاضی فراهم می‌آورند و توجه مشترک یادگیرندگان را به ویژگی‌های بازنمایی‌های ریاضی معطوف می‌کنند.

با توجه به پژوهش‌های اخیر، یادگیری مفهوم تسـاوی و حل معادله تنها حاصل فعالیت ذهنی فردی نیست، بلکه در بستر تعاملات کلاســی و با اتکا به ابزارهایی شــکل می‌گیرد که معلمان برای ســاخت معنا به‌کار می‌گیرند. از همین‌رو، توجه به رویکردهایی که یادگیری را فرایندی میانجی‌شــده[1]، اجتماعی و وابســته به ابزارهای فرهنگی می‌دانند، می‌تواند چشــم‌انداز مناسـبی برای تحلیل شـیوه‌های تدریس فراهم کند. مرور مطالعات پیشین نشان می‌دهد که اگرچه در ادبیات آموزش ریاضی به اهمیت ابزارهای روان‌شـناختی اشـاره شـده اسـت، اما بخش عمده پژوهش‌ها بر خطاهای مفهومی دانش‌آموزان یا ارزیابی اثربخشــی مداخلات آموزشــی متمرکز بوده‌اند، در حالی که کمتر به این پرداخته شــده اســت که معلمان در جریان تدریس روزمره از چه ابزارهایی اسـتفاده می‌کنند و چگونه آن‌ها را به کار می‌برند. از همین رو، پژوهش حاضـر با تمرکز بر تجربه‌ی معلمان پایه‌ی هفتم و با رویکرد پدیدارنگاری، در پی توصـیف شـیوه‌های متفاوت اسـتفاده از این ابزارها در میانجی‌گری مفهوم در کلاس درس اسـت. فهم این سـازوکار، نیازمند چارچوبی است که یادگیری را امری اجتماعی و میانجی‌شده تبیین کند. از این منظر، نظریه‌ی فرهنگی–اجتماعی ویگوتسـکی راهگشـا اسـت؛ زیرا با تبیین فرایند درونی‌سـازی نشـانه‌ها و شـکل‌گیری شـناخت در بسـتر تعاملات اجتماعی، چارچوبی منسجم برای تحلیل چگونگی تبدیل ابزارهای روان‌شناختی به سـاختارهای ذهنی دانش‌آموزان به دسـت می‌دهد. همچنین پژوهش‌های برنامه درسـی نیز بر اهمیت رویکرد اجتماعی–فرهنگی در آموزش ریاضی به‌منظور درک مؤلفه‌های زمینه‌ای و فرایندیِ شکل‌گیری یادگیری تأکید دارند (Niroo, 2025).

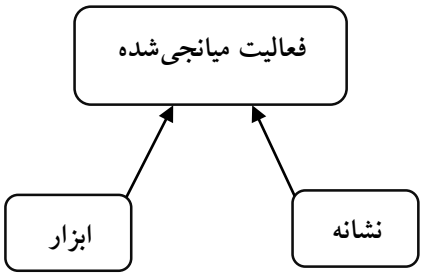
نظریه‌ی رشد فرهنگی–اجتماعی ویگوتسکی تأکید دارد که یادگیری فرایندی اجتماعی و میانجی‌شده است (Vygotsky, 1978, p. 57, 90) و یادگیری زمانی رخ می‌دهد که فرد در منطقه تقریبی رشـد[2] خود یعنی فاصـله بین سـطح رشد واقعی و سـطح رشـد بالقوه در تعامل با دیگران آگاه‌تر فعالیت کند. در آموزش ریاضـی، این دیگران آگاه‌تر، می‌توانند شـامل معلمان، بزرگسـالان، هم‌کلاسـی‌ها یا حتی ابزارهایی مانند خط‌کش یا چرتکه باشـند، زیرا این ابزارها حامل دانش فرهنگی و تاریخی در طراحی و کاربرد خود هسـتند (Abtahi, 2016). در چارچوب این نظریه، انسان برای یادگیری و انجام فعالیت‌های ذهنی، از میانجی‌هایی استفاده می‌کند که به دو دسته‌ی ابزار و نشانه تقسیم می‌شوند. این میانجی‌ها باعث می‌شوند که فعالیت‌های ما نه به‌صـورت مسـتقیم، بلکه از طریق یک واسطه انجام شوند؛ به این ترتیب، این نوع فعالیت‌ها را «فعالیت‌های میانجی‌شده[3]» می‌نامند. ابزار [4]چیزی اسـت که انسان برای تغییر دادن یا تأثیر گذاشتن بر محیط فیزیکی خود به‌کار می‌برد. در مقابل، نشانه[5] وسـیله‌ای اسـت که انسـان برای تأثیر گذاشـتن بر رفتار خود یا دیگران به‌کار می‌برد (Vygotsky, 1978, pp. 54–55). مثلاً دانش‌آموزی که با خط‌کش خطی می‌کشد یا با ماشین‌حساب عددی را محاسبه می‌کند، در حال استفاده از ابزار است و وقتی دانش‌آموز برای یادآوری یک نکته از یک رمز ذهنی استفاده می‌کند، یا معلم با زبان ساده مفهومی را توضیح می‌دهد، از نشانه

---

۱. فرایندی که در آن یادگیری به‌طور مسـتقیم، ناگهانی یا بدون واسـطه رخ نمی‌دهد؛ بلکه معلم با به‌کارگیری و هماهنگ‌سـازی ابزارها و نشـانه‌ها (مانند گفتار، حرکات بدن، نمادها و مصنوعات آموزشی)، توجه دانش‌آموز را به‌سوی معنای ریاضی مورد نظر هدایت می‌کند.

2. Zone Of Proximal Development (Zpd)
3. Mediated Activity
4. Tool
5. Sign

بهره می‌برند. او نشـــانه‌ها را نیز نوعی ابزار می‌دانســـت، ابزاری برای کنترل رفتار خود یا دیگران. پس هر دو واســـطه فعالیتی میانجی شده هستند (Vygotsky, 1978, p. 52) (شکل ۱).



شکل ۱. ابزار و نشانه به عنوان دو واسطه در فعالیت میانجی‌شده از دیدگاه ویگوتسکی (اقتباس از Vygotsky, 1978, p. 55).

بر اســاس دیدگاه ویگوتسکی، درونی‌سازی[1] یعنی فرآیند ساخت دانش فردی، ریشه در استفاده از نشانه‌ها (در درجه اول زبان طبیعی، اما همچنین هر نوع نشـانه، از حرکات گرفته تا پیچیده‌ترین آنها مانند سـیسـتم‌های نشـانه‌شـناسی[2] ریاضی) در فضـای بین فردی دارد. به همین دلیل، تحلیل فرآیند درونی‌سازی می‌تواند بر تحلیل عملکرد زبان طبیعی و سایر سیستم‌های نشـــانه‌شـــناختی در فعالیت‌های اجتماعی متمرکز شـــود (Wertsch & Addison Stone, 1995). به عبارت ســـاده‌تر، وقتی دانش‌آموز در گفت‌وگو با معلم یا همکلاسی خود مفهومی را یاد می‌گیرد، در حال استفاده از نشانه‌هاست؛ مثلاً وقتی معلم با زبان سـاده توضـیح می‌دهد، یا با شـکل و نمودار، یا حتی با حرکات دسـت، به یادگیری کمک می‌کند. این نشانه‌ها ابتدا در فضـای اجتماعی به‌کار می‌روند، سـپس به مرور در ذهن دانش‌آموز درونی می‌شوند و به ابزارهای فکری او تبدیل می‌گردند (Bartolini Bussi, & Mariotti, 2008, p. 750). از نگاه او، بین اســـتفاده از ابزار برای انجام کارهای عملی و اســـتفاده از نشـانه‌ها برای حل مسائل ذهنی (مانند به خاطر سپردن، مقایسه کردن، انتخاب و ...) شباهت مهمی وجود دارد. همان‌طور که ابزار در کـارهای فیزیکی به ما کمک می‌کند، نشـــانه نیز در فعالیت‌های ذهنی همین نقش را ایفا می‌کند، او آنها را ابزارهای روانشـناختی[3] نامید (Vygotsky, 1978, p. 52). در راستای تبیین عملیاتیِ این نظریه، مفهوم «داربست‌بندی[4]» جایگاه ویژه‌ای در تحلیل کنش‌های معلم دارد. داربســـت‌بندی به‌معنای حمایت موقتی برای تکمیل تکلیفی اســـت که یادگیرنده در غیر این صـورت قادر به انجام آن نیسـت (Wood et al., 1976) این حمایت به شـیوه‌های گوناگونی چون الگودهی، طرح پرسش و تبادلات ارتباطی فراهم می‌شـود؛ فرآیندی که در آن دانش‌آموز از دیدگاه فردی که دانش و آگاهی بیشتری دارد (فرد آگاه‌تر)، می‌آموزد (Van de Pol et al., 2010) مفهوم مذکور پیوندی وثیق با نظریه اجتماعی–فرهنگی ویگوتسکی دارد؛ زیرا یادگیری ابتدا در سـطح اجتماعی شکل می‌گیرد، معلم و دانش‌آموز از طریق کنش‌های متقابل ارتباطی به درک مشترک دست می‌یابند

1. Internalization

۲. سـیسـتم نشـانه‌شـناختی یعنی مجموعه‌ای از نشـانه‌ها (مثل واژه‌ها، نمادهای ریاضـی، شـکل‌ها، نمودارها، کنش‌های بدنی ، مصنوعات و ...) به همراه قوانین و قراردادهایی که مشخص می‌کنند این نشانه‌ها چگونه معنا می‌دهند و چگونه باید به کار روند.

3. Psychological Tools
4. Scaffolding

(Stone, 1993) و از سوی دیگر(Cazden, 1979, as cited in van de Pol et al., 2010) آن را دقیقاً در بستر منطقه تقریبی رشد ویگوتسکی تعریف می‌کند.

بر اساس ادبیات پژوهشی می‌توان گفت این ابزارها و نشانه‌ها در تدریس مفاهیم ریاضی به چهار دسته مکمل تقسیم می‌شود.

ابزارهای زبانی:

در نظریه‌ی فرهنگی– اجتماعی ویگوتسکی، زبان اصلی‌ترین ابزار روان‌شناختی در رشد و یادگیری است و اندیشه و زبان در تعامل متقابل به‌تدریج از گفتار اجتماعی به گفتار درونی و ابزار تفکر تبدیل می‌شوند (Vygotsky, 1986). از این منظر، زبان نه صرفاً وسیله‌ی بیان، بلکه ابزاری برای سازمان‌دهی ذهن و ساخت معناست. در آموزش ریاضی، زبان گفتاری و نوشتاری نقش اساسی در نام‌گذاری، توصیف و تثبیت مفاهیم دارد و گفتار معلم و دانش‌آموزان ابزاری میانجی برای ورود به نظام مفاهیم ریاضی است (Bartolini Bussi & Mariotti 2008). در گسترش این دیدگاه، زبان بخشی از نظام نشانه‌ای چندوجهی است که همراه با حرکات و نمادها در ساخت معنای ریاضی مشارکت می‌کند و در کنار اشیای فرهنگی ابزاری برای «عینیت‌بخشی به دانش[1]» محسوب می‌شود (Radford 2009, 2003).

ابزارهای نمادین:

ابزارهای نمادین شامل علائم ریاضی، فرمول‌ها، نمودارها، نوشتار و هر نوع نشانه‌ی قراردادی‌اند که به سازمان‌دهی تفکر و بازنمایی مفاهیم کمک می‌کنند. ویگوتسکی آن‌ها را ابزارهای روان‌شناختی می‌داند که در فعالیت‌های ذهنی نقش میانجی دارند (Vygotsky; 1981, p. 136). در رویکرد Radford (2003) این ابزارها بخش اساسی فرایند یادگیری ریاضی و عینیت‌بخشی به دانش‌اند. دانش‌آموزان از طریق نمادها و نشانه‌های نوشتاری اندیشه‌های انتزاعی خود را قابل‌دیدن و قابل‌اشتراک می‌سازند. به بیان او، این ابزارها «وسایل نشانه‌ای عینیت‌بخشی» هستند که مفاهیم انتزاعی را در قالب‌های دیداری، حرکتی و زبانی بازنمایی می‌کنند (Radford, 2003, p. 54). برای نمونه، نوشتن معادله $y = 2x - 1$ یا رسم نمودار آن در مختصات دکارتی، بازنمایی نمادین رابطه‌ی متغیرهاست و درک را تسهیل می‌کند.

ابزارهای حرکتی:

ابزارهای حرکتی شامل اشاره، حرکات دست و کنش‌های بدنی‌اند که در یادگیری نقش میانجی دارند. ویگوتسکی آن‌ها را نخستین نشانه‌های دیداری و پایه‌ای برای نمادپردازی می‌دانست و تأکید داشت که همانند زبان و نمادها بخشی از نظام نشانه‌ای‌اند که به سازمان‌دهی تفکر کمک می‌کنند (Vygotsky, 1998, 1997). Radford (2009) نشان می‌دهد که تفکر انسانی در تعامل پویا میان گفتار، حرکت و اشیای فرهنگی ساخته می‌شود و حرکات اشاره‌ای بخشی از فرایند اندیشیدن و سازنده معنا هستند. پژوهش‌های اخیر نیز نشان داده‌اند که معلمان از حرکات بدنی به‌صورت هدفمند برای تقویت درک مفاهیم ریاضی استفاده می‌کنند و این حرکات در پیوند با گفتار و ابزارهای دیداری مفاهیم انتزاعی را قابل‌فهم‌تر می‌سازند (Robutti et al., 2023; Alibali & Nathan, 2007). برای نمونه، حرکت استعاری دست معلم هنگام توضیح «بی‌نهایت» می‌تواند مفهومی انتزاعی را در قالب تجربه‌ای دیداری و بدنی معنا کند (Núñez, 2008).

مصنوعات:

1. Objectification Of Knowledge

ویگوتسکی مصنوعات را ابزارهای روان‌شناختی می‌داند که از طریق کاربرد عملی، رفتار و ساخت معنا را میانجی‌گری کرده و در یادگیری نقش مهمی دارند (Vygotsky, 1981). در آموزش ریاضی، این ابزارها زمانی کارکرد آموزشی می‌یابند که معلم آن‌ها را در فعالیت‌های هدفمند به‌کار گیرد و از طریق گفت‌وگو و هدایت، پتانسیل‌شان را به نشانه‌های حامل معنا تبدیل کند (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). نظریه‌ی «میانجی‌گری نشانه‌شناختی[1]» نیز توضیح می‌دهد که مصنوعات در تعامل دانش‌آموز با فعالیت و با هدایت معلم به معنای ریاضی پیوند می‌خورند (Maschietto, 2015; Meira, 1998). هر مصنوع دارای «پتانسیل نشانه‌ای» است؛ هم به انجام فعالیت کمک می‌کند و هم زمینه‌ی شکل‌گیری معناهای ریاضی را فراهم می‌سازد. برای نمونه، استفاده از «نخ و میخ» در آموزش دایره، علاوه بر امکان رسم آن، به درک ویژگی‌های ریاضی مانند فاصله‌ی ثابت از مرکز منجر می‌شود. بدین ترتیب، مصنوع واسطه‌ای برای تبدیل تجربه‌ی عملی به دانش ریاضی است.

روش

این پژوهش با رویکرد پدیدارنگاری و با اتکا به چارچوب مفهومی Marton (1981) انجام شد. در پدیدارنگاری، هدف نه کشف یک حقیقت واحد، بلکه توصیف تفاوت‌های کیفی در شیوه‌ای است که افراد یک پدیده را تجربه یا ادراک می‌کنند. همان‌طور که Marton (1981) تأکید می‌کند، پدیدارنگاری به دنبال بازنمایی گستره‌ای از راه‌های تجربه است، نه ارائه یک تبیین واحد، از این‌رو بستر مناسبی برای مطالعه تجربه تدریس و استفاده از ابزارهای روان‌شناختی توسط معلمان فراهم می‌کند. این رویکرد در آموزش ریاضی ایران نیز پیش‌تر برای واکاوی طیف کیفی تجارب و رویکردهای معلمان به‌کار گرفته شده است .(Goya et al., 2013) در این پژوهش، پدیده مورد مطالعه «رویکرد معلمان در به‌کارگیری ابزارهای روان‌شناختی در آموزش مفهوم تساوی و معادله» بود.

شرکت‌کنندگان: شرکت‌کنندگان شامل چهارده معلم ریاضی پایه هفتم از مدارس مختلف شهر کرمان بودند که با روش نمونه‌گیری هدفمند انتخاب شدند. در انتخاب آنان تلاش شد تنوعی از سابقه کاری (۵ تا ۲۷ سال)، مدرک (کارشناسی تا دکتری)، جنسیت و فضای مدرسه فراهم شود تا امکان آشکار شدن تفاوت‌های کیفی تجربه‌ها مطابق منطق پدیدارنگاری فراهم گردد. تمامی معلمان سابقه تدریس معادله در دوره اول متوسطه را داشتند و داوطلبانه در پژوهش مشارکت کردند. فرایند نمونه گیری تا زمان رسیدن به اشباع نظری مقوله‌ها ادامه یافت. یعنی زمانی که شیوه جدیدی از تجربه در داده‌ها ظاهر نشد Flick (2006).

گردآوری داده‌ها: داده‌ها از طریق مصاحبه‌های نیمه‌ساختاریافته به صورت حضوری و مجازی گردآوری شد. سه مصاحبه بصورت مجازی در نرم‌افزار شاد و بقیه (۱۱ مصاحبه) به صورت حضوری جمع‌آوری شد. مصاحبه‌ها به‌گونه‌ای طراحی شده بود که معلمان بتوانند تجربه واقعی خود از بکارگیری ابزارهای روانشناختی در تدریس مفهوم تساوی و معادله را توصیف کنند. موضوعی که Marton (1981) آن را محور اساسی مصاحبه‌های پدیدارنگارانه می‌داند. در کنار سوالات اصلی در هر مصاحبه بنابر موقعیت، سوالات دیگری هم پرسیده شد. هر مصاحبه بین ۴۵ تا ۶۰ دقیقه طول کشید و بر چگونگی تدریس و نمونه‌هایی از موقعیت‌های واقعی کلاس تمرکز داشت تا تجربه زیسته معلمان به صورت شفاف آشکار شود. مثلا در این پژوهش از مشارکت‌کنندگان پرسیده شد:

1. Theory Of Semiotic Mediation (Tsm)

- شما مبحث حل معادله در پایه هفتم را چگونه تدریس می‌کنید؟
- چگونه تدریس این بخش را آغاز می‌کنید؟
- مفهوم تساوی را چگونه برای دانش‌آموزان تدریس می‌کنید؟
- برای ساده تر شدن فهم مراحل حل معادله چه کاری انجام می‌دهید؟

تحلیل داده‌ها: در تحلیل داده‌های مصاحبه از روش هفت‌مرحله‌ای Dahlgren and Fallsberg (1991) استفاده شد. این روش چارچوب استاندارد و پذیرفته‌شده تحلیل داده‌ها در رویکرد پدیدارنگاری است (Lundh et al., 2019). و به دلیل داشتن یک فرآیند تکرارشونده، داده‌های مصاحبه را بدون پیش‌داوری به مقوله‌های توصیفی که نشان‌دهنده شیوه‌های متفاوت از تجربه یک پدیده هستند، تبدیل می‌کند. این هفت گام عبارتند از:

۱) مطالعه چندباره متون مصاحبه‌ها برای آشنا شدن با محتوای آنها؛
۲) گردآوری و استخراج واحدهای معناییِ مرتبط با پدیده مورد مطالعه؛
۳) مقایسه بخش‌های استخراج‌شده برای شناسایی شباهت‌ها و تفاوت‌ها؛
۴) تشکیل مقوله‌های توصیفی اولیه با توجه به شباهتها و تفاوتها؛
۵) مقایسه مقوله‌های توصیفی اولیه با متون مصاحبه و انجام اصلاحات موردنیاز؛
۶) نامگذاری مقوله‌های توصیفی؛
۷) مقایسه نهایی شباهت‌ها و تمایزهای کیفی میان مقولات توصیف جهت تثبیت فضای نتیجه.

بدین منظور، ابتدا متن مصاحبه‌ها چندین بار با دقت خوانده شد تا درک کلی از تجربه‌ی معلمان در استفاده از ابزارهای روان‌شناختی حاصل شود. سپس واحدهای معنایی مرتبط با شیوه‌ی تجربه و به‌کارگیری ابزارهای روان‌شناختی (زبانی، نمادین، حرکتی و مصنوعی) استخراج و با یکدیگر مقایسه شدند. این مقایسه‌ی مداوم امکان شناسایی تفاوت‌های کیفی را فراهم کرد و در فرایندی رفت‌وبرگشتی (گام‌های ۴ تا ۷ Dahlgren and Fallsberg (1991)) تجارب مشابه گروه‌بندی، هسته معنایی هر مقوله مشخص و برچسب‌گذاری شد؛ سپس با مقایسه تقابلیِ دوبه‌دوی مقوله‌ها، مرز مفهومی میان آن‌ها شفاف و تفاوت کیفی‌شان تثبیت گردید .همچنین این مقوله‌ها در چارچوب نظری پژوهش سازمان‌دهی شدند تا تبیینی روشن از به‌کارگیری ابزارها در میانجی‌گری مفهوم معادله ارائه شود. برای بررسی قابلیت اعتبار، نتایج تحقیق با تعدادی از معلمان شرکت‌کننده مطرح و تأیید شد. همچنین به‌منظور بررسی قابلیت اطمینان، فرایند استخراج مقوله‌ها و نتایج تحلیل با یک متخصص حوزه پدیدارنگاری به اشتراک گذاشته شد و پس از بحث و بررسی، بر سر مقوله‌های نهایی توافق حاصل گردید.

یافته‌ها

تحلیل مصاحبه‌های این پژوهش نشان داد که معلمان ریاضی، پدیده‌ی «ابزارهای روانشناختی در آموزش مفهوم تساوی و معادله» را از طریق الگوهای تجربی متفاوتی فهم و اجرا می‌کنند. تمام مصاحبه شوندگان در این پژوهش، معادله را در ابتدا یک رابطه تعادلی دیده‌اند و در انتها، تدریس به حل معادله به شیوه عملیاتی منجر شده است. در این میان، تفاوت‌ها در نحوه‌ی استفاده از ابزارهای روان‌شناختی شامل زبان، حرکت، نماد و ابزارهای مصنوعی آشکار گردید. یافته‌های به‌دست‌آمده ساختار این تنوع را نشان می‌دهند و بیان می‌کنند که هر دسته از ابزارها چگونه در تجربه‌ی معلمان و در فرایند شکل‌گیری مفهوم

تساوی و آموزش معادله نقش‌آفرین بوده است. بر پایه‌ی تحلیل پدیدارنگاری، داده‌ها در قالب چند دسته‌ی اصلی سامان‌دهی شدند که مقوله‌های هر دسته در جدول شماره ۱ آمده است.

جدول ۱: ابزارهای روان شناختی و مقوله‌های مرتبط

ردیف	ابزارهای روانشناختی	مقوله‌ها
۱	ابزار زبانی در تجربه‌ی معلمان ریاضی	• مقوله اول: زبان به عنوان ابزار فعال‌سازی ذهن و ورود به مفهوم • مقوله دوم: زبان هدایت‌گر و پله‌ای در حل معادله • مقوله سوم: زبان استعاری و تثبیت کننده مفهوم
۲	ابزار حرکتی در تجربه‌ی معلمان	• مقوله چهارم: بدن به مثابه ابزار میانجی در ساخت معنا
۳	ابزارهای نمادین در آموزش مفهوم تساوی و معادله	• مقوله پنجم، نمادهای بصری عینیت بخش • مقوله ششم، نمادهای جبری تثبیت کننده
۴	ابزارهای مصنوعی در آموزش مفهوم تساوی و معادله	• مقوله هفتم، مصنوع به مثابه ابزار ساخت معنا • مقوله هشتم، مصنوع به مثابه ابزار پشتیبان در تعمیق معنا

مقوله‌های هشتگانه که در جدول شماره ۱ آمده است، در ادامه با جزییات بیشتر توضیح داده خواهند شد.

مقوله اول، زبان به عنوان ابزار فعال‌سازی ذهن و ورود به مفهوم: Vygotsky (1981) زبان را بنیادی‌ترین ابزار روان‌شناختی برای میانجی‌گری شناختی و فعال‌سازی فرایندهای ذهنی معرفی می‌کند. از این منظر، یادگیری مفاهیم انتزاعی از جمله تساوی و معادله هنگامی آغاز می‌شود که زبان در نقش واسطه‌ی تفکر عمل کند و امکان حرکت از تجربه‌ی روزمره به ساختارهای نمادین ریاضی را فراهم سازد. شواهد گفتاری معلمان نشان می‌دهد که زبان در آغاز درس، ابزاری برای بیدار کردن ذهن، سازمان‌دهی توجه و ساختن اولین تصویر مفهومی از معادله است.

" از آن‌ها می‌خواهم هر چیزی که با شنیدن کلمه معادله به ذهنشان می‌رسد بیان کنند. معمولاً به عباراتی مانند معادل بودن، تساوی و علامت اشاره می‌کنند. از همین عبارات برای بیان مفهوم معادله استفاده می‌شود. " (مصاحبه شماره ۶).

"معادله و معادل لاتینش را روی تخته می‌نویسیم. هم‌خانواده‌ها و معنی فارسی معادله را می‌گویم. " (مصاحبه شماره ۹).

" ... از آن‌ها می‌خواهم که خودشان بگویند که «معادله» هم خانواده چه کلمه‌ای است و از چه واژه‌ای گرفته می‌شود که خودشان به واژه‌هایی مثل عدالت، عادل و عدل و ... می‌پردازند که من تصحیح می‌کنم که از تعادل گرفته شده است و این واژه صحیح‌ترین معنی است. " (مصاحبه شماره ۱).

" برای شروع، ابتدا با پرسش‌هایی مثل محیط مربع چیست؟ مجهول چیست؟ ... ذهن دانش‌آموز را آماده می‌کنم. " (مصاحبه شماره ۲).

شواهد نشان می‌دهد که معلمان در آغاز درس، از زبان به‌عنوان ابزاری برای آماده‌سازی ذهنی دانش‌آموزان و فعال‌سازی پیش‌دانسته‌های آنان استفاده می‌کنند. در روایت معلم شماره ۶، درخواست از دانش‌آموزان برای بیان نخستین تداعی‌هایشان از واژه «معادله»، درواقع تلاشی برای برانگیختن طرحواره‌های زبانی و ایجاد یک نقطه شروع مشترک برای فهم مفهوم است. معلم شماره ۹ نیز با توضیح ریشه و هم‌خانواده‌های واژه معادله، می‌کوشد دانش‌آموزان را از طریق پیوندهای واژگانی وارد

فضای معنایی درس کند. در مصاحبه شماره ۱، مشاهده می‌شود که معلم پس از شنیدنِ تداعی‌های دانش‌آموزان (مانند عدالت و عدل)، با هدفِ تخصصی کردنِ دامنه معنایی، تمرکز آن‌ها را از مفاهیمِ کلی به سمت مفهومِ تعادل سوق می‌دهد. این کنشِ معلم، نه صرفاً برای اصلاح یک خطای زبانی، بلکه به منظور هم‌راستا کردنِ درکِ دانش‌آموز با مدلِ فیزیکیِ موازنه انجام می‌شود تا پیش‌زمینه لازم برای استفاده از ابزارهای نشانه‌شناختی (مانند ترازو) فراهم گردد. در مصاحبه شماره ۲ نیز پرسش‌های ابتدایی درباره محیط و مجهول، نقش زبانی در جهت‌دهی به توجه و آماده‌سازی شناختی را نشان می‌دهد. به‌طور کلی، این شواهد بیانگر آن است که معلمان از زبان نه‌تنها برای توضیح محتوا، بلکه به‌عنوان سازوکار آغازین برای فعال‌سازی ذهن، سازمان‌دهی توجه، و شکل‌دهی چارچوب مفهومی درس استفاده می‌کنند. زبان در این مرحله نقش دروازه ورود به مفهوم را ایفا می‌کند و مسیر فهم معادله را برای دانش‌آموزان هموار می‌سازد.

مقوله دوم، زبان هدایت‌گر و پله‌ای در حل معادله: در رویکرد فرهنگی–اجتماعیِ یادگیری، زبان اصلی‌ترین وسیله‌ای است که «دیگریِ آگاه‌تر» از طریق آن فرایند اندیشیدنِ یادگیرنده را به‌طور تدریجی هدایت و پله‌پله پشتیبانی می‌کند. حمایتی که Vygotsky (1978) آن را جزء سازوکارهای اساسی کارکرد میانجی‌گری و رشد در منطقه‌ی تقریبی رشد می‌داند. در شواهد گفتاری معلمان، این حمایت اغلب با طرح پرسش‌های هدایت‌گر، بازگوئی جزئیات و برجسته سازی مراحلی انجام می‌شود که مسیر حرکت از حدس ابتدایی تا حل مستقل معادله را برای دانش‌آموزان ممکن می‌سازد.

"... واژه جبر را به معنی جبران کردن برایشان تعریف می‌کنیم ... ، از آن‌ها می‌خواهم که خودشان بگویند «معادله» هم خانواده چه کلمه‌ای است ...سپس روی تخته یک معادله ساده می‌نویسم ... اینجاست که معنای جبران کردن که به منظور جایگذاری یک عدد به جای متغیر داخل معادله می‌باشد و با حدس و آزمایش جواب را پیدا می‌کنیم. ... سپس برای آن‌ها به توضیح این مطلب می‌پردازیم که برای برقراری این تساوی لازم است که اگر به یک طرف علامت مساوی عددی کم، زیاد، ضرب یا تقسیم انجام بگیرد می‌بایست به طرف دیگر نیز این اتفاق بیفتد. ... سپس با پرسش و پاسخ ابتدا عدد معلوم و سپس ضریب مجهول را از بین می‌بریم و می‌گوییم که قصدمان تنها کردن مجهول است." (مصاحبه شماره ۱).

"... با پرسش و پاسخ حل می‌کنیم. ... به چه عددی 2 واحد اضافه شود تا حاصل 5 شود ؟ ... 3 برابر چه عددی 21 می‌شود؟ ... بعد از مسائل ساده‌تر به سراغ مسائل پیچیده‌تر می‌رویم. ... و اینجاست که دانش‌آموز مشتاق یادگیری روش دیگری می‌شود. ... با بچه‌ها صحبت می‌کنیم که دوست دارید x نابود شود یا $x\ 2$؟ مثلا $x\ 2$ را انتخاب می‌کنند. می‌پرسیم دشمن $x\ 2$؟ می‌گویند $x\ 2-$ و به طرفین اضافه می‌کنیم، ... حال نوبت نابود کردن $3+$ می‌شود دشمن $3+$ ، عدد $3-$ است. مجدداً دو طرف تساوی را با $3-$ جمع می‌کنیم. ... آخرین مزاحم علامت $-$ می‌باشد و چون دشمن علامت $-$، علامت $-$ است، طرفین را در منفی ضرب می‌کنیم." (مصاحبه شماره ۳).

"در مبحث معادله ابتدا معنای کلمه معادله از دانش‌آموز می‌پرسم ... از همین عبارات برای بیان مفهوم معادله استفاده می‌شود ... معادله به ترازوی دوکفه‌ای تشبیه می‌شود ... اگر به یک طرف وزنه‌ای اضافه کنیم، برای حفظ تعادل باید همان را به طرف دیگر اضافه کنیم. ... برای خلاص شدن از شر ۲- یک عدد ۲ اضافه می‌کنیم ... سپس برای حذف ضریب، دو طرف را تقسیم می‌کنیم." (مصاحبه شماره ۶).

شواهد نشان می‌دهد که معلمان هنگام آموزش معادله، از زبان نه صرفاً برای توضیح محتوا، بلکه برای هدایت مرحله‌به‌مرحله مسیر حل استفاده می‌کنند. این هدایت زبانی، شکل‌هایی چون طرح پرسش‌های پی‌درپی، برجسته‌سازی مراحل، نام‌گذاری عمل‌ها، و درخواست از دانش‌آموز برای انجام گام بعدی را دربرمی‌گیرد. در روایت معلم شماره ۱، او فرایند را با پرسش‌های مقدماتی و هدایت‌های کوچک آغاز می‌کند، که نشان‌دهنده استفاده از زبان برای ساختن مسیر حرکت ذهنی دانش‌آموز است. در مصاحبه ۳، معلم قصد دارد با طرح سؤال‌های مرحله‌ای عملاً با خرد کردن مسئله به گام‌های قابل‌فهم،

فرایند حل را قابل ردیابی کند و دانش‌آموز را از «حدس و آزمایش» به روش ساختاریافته‌تر هدایت کند. روایت معلم شماره ۶ نشان می‌دهد که زبان او نقش یک هدایت‌گر ساختاریافته را ایفا می‌کند. روایت معلم شماره ۶، نشان می‌دهد که زبان او نقش میانجی‌گر تعاملی را ایفا می‌کند. پرسیدن معنای «معادله» از دانش‌آموزان نه یک پله در زنجیره‌ای سلسله‌مراتبی، بلکه تلاشی برای پی‌ریزی و ایجاد درک مشترک در سطح اجتماعی است تا دانش‌آموزان از طریق تجارب پیشین زبانی وارد بستر حل مسئله شوند (Van de Pol et al., 2010). سپس با تشبیه معادله به ترازو، معلم یک میانجی نشانه‌ای و نمادین مشترک می‌سازد که به مثابه تکیه‌گاهی موقت، تفکر دانش‌آموز را هدایت می‌کند. همچنین تمرکز معلم بر حذف مرحله‌ایِ عددها و ضرایب، مصداق بارز حمایت ساختاردهنده و تعدیل درجات دشواری تکلیف است که در نظریه داربست‌بندیِ آموزشی (Wood et al., 1976) مطرح می‌شود؛ معلم با این شیوه، پیچیدگی تکلیف را متناسب با ظرفیت لحظه‌ای یادگیرنده تنظیم می‌کند تا امکان مشارکت فعال و پیشروی او در منطقه تقریبی رشد فراهم گردد.

توجه به این نکته ضروری است که اگرچه ظاهر شیوه برخی معلمان (مانند مصاحبه شماره ۳) مبتنی بر پرسش و پاسخ و گام‌به‌گام به نظر می‌رسد، اما تحلیل دقیق کلام آنان نشان می‌دهد که بخشی از این توضیحات فاقد آگاهی ساختاری از جبر است. استفاده از تعابیر کیفی و شبه‌روایی نظیر «نابود کردن»، «دشمنِ عبارت» یا «خلاص شدن از شر مزاحم»، هرچند به ظاهر مراحل الگوریتمی حل معادله را پیش می‌برند، اما بر پایه «تمثیل‌های کیفی[1]» (Stacey & Vincent, 2009) شکل گرفته‌اند. این تعابیر نه بر تناظر ساختاری ریاضی، بلکه بر تداعی‌های لفظی استوارند و دانش‌آموز را از درک «اصل تساوی به مثابه رابطه هم‌ارزی و اعمال عملگرهای معکوس بر طرفین محروم می‌سازند. چنین آموزش‌هایی ممکن است در معادلات ساده به پاسخ عددی بینجامند، اما در مواجهه با مسائل ساختاری و پیچیده‌تر، مانع تفکر انتزاعی شده و به بدفهمی‌های پایدار دامن می‌زنند.

مقوله سوم، زبان استعاری و تثبیت کننده مفهوم: در نظریه‌ی فرهنگی–اجتماعی ویگوتسکی، زبان بنیادی‌ترین ابزار روان‌شناختی برای میانجی‌گری شناخت و شکل‌گیری فرایندهای عالی ذهن است؛ کارکردهای ذهنی ابتدا در قالب گفتار اجتماعی ظاهر شده و سپس درونی می‌شوند .(Vygotsky, 1986) از این منظر استعاره‌ها و تشبیه‌ها نه صرفاً ابزار بیان، بلکه نشانه‌های فرهنگی‌اند که تجربه‌ی حسی و مفاهیم انتزاعی را قابل‌فهم می‌سازند. در این چارچوب، هر نشانه‌ای از کلمه تا تصویر و استعاره، وسیله‌ای برای هدایت توجه و تثبیت معناست. Radford (2003) توضیح می‌دهد که معنا در یادگیری ریاضی از خلال نظام‌های نشانه‌ای چندوجهی تولید می‌شود و استعاره‌ها و روایت‌های زبانی ابزارهایی برای عینیت‌بخشی و ایجاد پل میان تجربه‌ی جسمانی و ساختارهای نمادین‌اند. شواهد نشان می‌دهد که معلمان برای ساده‌سازی مفاهیم انتزاعی معادله از این ابزارهای زبانی بهره می‌گیرند؛ ابزارهایی که به‌مثابه «نشانه‌های میانجی» مسیر درونی‌سازی مفاهیم را هموار می‌کنند.

> *"فرض کنید مساوی، دیوار بین دو همسایه است. xها خانم و اعداد آقا هستند و می‌خواهند خانم‌ها و آقایان از هم جدا شوند. سمت چپ خانم‌ها و سمت راست آقایان. حال کسی که می‌خواهد از خانه بیرون بیاید، لباس عوض می‌کند. ضریب نیز نوعی مزاحم است به معنای ضرب و دشمن ضرب تقسیم می‌شود. " (مصاحبه شماره ۴).*
>
> *"معادله به ترازوی دو کفه‌ای تشبیه می‌شود که باید همیشه متعادل باشد ... اگر به یک طرف وزنه‌ای اضافه کنیم، برای حفظ تعادل باید همان مقدار را به طرف دیگر بدهیم. ... مجهول مثل یک جعبه است که عددی داخل آن است و من از مقدارش خبر ندارم. حل معادله یعنی پیدا کردن این مقدار. " (مصاحبه شماره ۶).*

1. Qualitative Analogies

"در پایان، مراحل را بصورت ساده و با زبان معمولی بیان می‌کنیم. ابتدا روی تساوی یک خط عمود می‌کشیم. ... متغیرها را کنار هم و عددها را کنار هم ... هر کس از این طرف دیوار به طرف دیگر دیوار رفت جریمه می‌شود و علامت آن تغییر می‌کند. ..." (مصاحبه شماره ۵).

"روی تساوی یک خط عمود می‌کشیم و می‌گوییم این خط عمود مثل یک دیوار می‌ماند ... بعد می‌گوییم معلوم‌ها یعنی اعداد و مجهول‌ها یعنی متغیرها با هم رابطه خوبی ندارند و می‌خواهند از هم جدا باشند درنتیجه متغیرها و اعداد به هم می‌گویند دور شو ...، کور شو ... دور شو یعنی برو آن طرف تساوی و کور شو یعنی تغییر علامت بده و ..." (مصاحبه شماره ۸).

"برای مثال برای حل معادله، میگم فرض کنید شما یک کارآگاه هستید و به دنبال ناشناخته‌ای به نام x (مجهول) می‌گردیم. ... به همین دلیل سرنخ‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم تا مسئله رمزگشایی شود. از آنجایی که ما x را می‌خواهیم پس قسمت‌های مزاحم را از بین می‌بریم. ... ۳ واحد از دو طرف کم میکنیم تا فقط $2x$ باقی بماند و طرف راست تساوی شش می‌شود و از آنجایی که ما به دنبال x هستیم اما طرف چپ تساوی $2x$ می‌باشد طرفین را بر عدد ۲ تقسیم می‌کنیم پس x برابر ۳ می‌شود. ..." (مصاحبه شماره ۱۱).

در روایت معلم شماره ۴، تشبیه مساوی به «دیوار میان دو همسایه» و نقش دادن به اعداد و متغیرها، تلاش برای تبدیل روابط جبری به موقعیت‌های آشنا و قابل‌تصور است. معلم شماره ۶، با تشبیه معادله به «ترازوی دو کفه‌ای» می‌کوشد اصل توازن را در قالب تجربه حسی و بصری تثبیت کند. استفاده معلم شماره ۸ از عبارت‌های گفتاری روزمره مانند «دور شو» و «کور شو» نیز نشان می‌دهد که بازگشت به زبان معمولی، به‌عنوان شکلی از ساده‌سازی، در تثبیت مراحل حل معادله نقش دارد. در مصاحبه ۱۱ نیز استعاره «کارآگاه و سرنخ‌ها» سازوکاری است برای جهت‌دهی به توجه دانش‌آموز و شفاف‌سازی فرایند حذفِ «مزاحم‌ها» در حل معادله. این شواهد نشان می‌دهد که معلمان زبان استعاری را نه صرفاً ابزار توضیح، بلکه وسیله‌ای برای عینیت‌بخشی و معنادار کردن ساختارهای نمادین استفاده می‌کنند. دقیقاً همان چیزی که رادفورد از آن به‌عنوان «وسایل نشانه‌ای برای عینیت‌بخشی» یاد می‌کند. همچنین بازگویی ساده‌سازی‌شده‌ی مراحل حل (مانند آن‌چه معلم شماره ۵ انجام می‌دهد) نشان می‌دهد که زبان برای معلمان در کلاس در مرحله پایانی نقش تثبیت‌کننده دارد و ارتباط میان نمادها و تجربه روزمره را مجدداً برقرار می‌سازد. به‌طور کلی، این کاربردهای استعاری و روزمره زبان، نشان‌دهنده تلاش معلمان برای پل‌زدن میان تجربه‌ی عینی و مفهوم انتزاعی است؛ تلاشی که در چارچوب ویگوتسکی و رادفورد، بخشی از فرایند میانجی‌گری زبانی و درونی‌سازی معنا تلقی می‌شود.

اما توجه به این نکته ضروری است که، اگرچه این کاربردهای استعاری و روزمره در نگاه نخست می‌توانند به‌منزله تلاشی برای عینیت‌بخشی و معنادار کردن ساختارهای نمادین تلقی شوند (Radford, 2003) اما تقسیم‌بندی میان نمونه‌های یادشده نکته‌ی ظریف‌تری را آشکار می‌کند. از میان این استعاره‌ها، تنها تشبیه «ترازوی دوکفه‌ای» (مصاحبه شماره ۶) را می‌توان یک مدل ریاضیِ نسبتاً معتبر دانست، زیرا میان ساختار فیزیکی تعادل و رابطه‌ی هم‌ارزیِ دو طرف معادله، تناظری ساختاری وجود دارد که امکان وارسی صحت محاسبه را فراهم می‌آورد. همین ویژگی است که ترازو را در شمار ابزارهای میانجیِ واقعاً عینیت‌بخش قرار می‌دهد. در مقابل، قیاس‌هایی چون «دیوار میان دو همسایه»، «خانم و آقا» یا «کارآگاه و سرنخ» (مصاحبه‌های ۴، ۱۱) بر تداعی‌ها و شباهت‌های سطحی تکیه دارند و فاقد چنین تناظر ساختاری‌اند.

از منظر آموزش ریاضی، این مقایسه نشان می‌دهد که زبان معلم می‌تواند هم ابزاری سازنده و هم عاملی برای بدفهمی باشد (Stacey & Vincent, 2009). نکته مهم این است که هر تشبیه یا استعاره‌ای به یادگیری مفهومی کمک نمی‌کند. تنها استعاره‌هایی مفیدند که با منطق و ساختار ریاضی هماهنگ باشند (مانند ترازو). اما تشبیه‌هایی که فقط ظاهر قضیه را ساده

می‌کنند و ارتباط منطقی با ساختار جبر ندارند، به جای فهم عمیق، دانش‌آموز را به حفظ کردن طوطی‌وار عادت می‌دهند و همان‌طور که در مقوله قبل اشاره شد، در مراحل بعدی یادگیری باعث سردرگمی او می‌شوند.

مقوله چهارم، بدن به مثابه ابزار میانجی در ساخت معنا:(Vygotsky (1997, p. 133, as cited in Radford, 2003, p. 69 کنش‌های بدنی را نخستین شکلِ نشانه‌گذاری می‌داند و تصریح می‌کند که «اشاره، نوشتنی است در هوا و نشانه نوشتاری غالباً اشاره‌ای تثبیت‌شده است». Radford (2009) نیز با تکیه بر همین ایده، در پژوهش‌های خود درباره‌ی ریاضیات مدرسه‌ای نشان می‌دهد که حرکات بدنیِ معلم و دانش‌آموز «بذرهایی» هستند که در جریان فعالیت‌های اجتماعیِ کلاس به نمادها و نشانه‌های ریاضی تبدیل می‌شوند. گزیده‌ای از شواهد گفتاری معلمان به شرح زیر است.

"برای نشان دادن حالت توازن در معادله، با حرکت دست یک ترازو که متوازن و متعادل است، نشان داده می‌شود. ... دانش‌آموزان با مثال‌های واقعی مانند تشبیه معادله به ترازو و زبان بدن معلم در این تشبیه ارتباط برقرار می‌کنند... " (مصاحبه شماره ۶).

"روی تخته یک ترازوی دارای دو کفه رسم می‌کنم ... ، با حرکت دست با لا آمدن یک کف و پایین رفتن کفه دیگر را با اضافه شدن وزنه‌ها تداعی می‌کنم. ..." . (مصاحبه شماره ۱۰).

"... وقتی جمله‌ها جابه‌جا می‌شوند علامت آن‌ها عوض می‌شود برای فهم این موضوع از کارتهایی استفاده می‌کنم که یک طرف آن خود تک جمله‌ای و طرف دیگر آن قرینه اش نوشته شده است. می‌گویم من مساوی هستم، وقتی کارتی از یک دست به دست دیگر منتقل می‌شود پشت و رو می‌شود بدین ترتیب قرینه خواهد شد ..." (مصاحبه شماره ۴).

"... با دست نشان می‌دم و می‌گم دور شو، ... چشمانم را می‌بندم و می‌گویم کور شو ..." (مصاحبه شماره ۸).

در روایت معلم شماره ۶، حرکت دست برای شبیه‌سازی بالا و پایین شدن کفه‌های ترازو، دانش‌آموز را به سطحی از تجربه عینی می‌برد که در آن توازن معادله دیده و حس می‌شود. این دقیقاً همان چیزی است که ویگوتسکی آن را نشانه‌گذاری بدنی اولیه می‌نامد. کنش بدنی که به‌تدریج می‌تواند به نشانه‌ای نمادی تبدیل شود. در مصاحبه ۱۰، اشاره‌های بدنی معلم هنگام نمایش اضافه شدن وزنه یا حرکت کفه‌ها، مسیر گذار از تجربه‌ی حسی به درک نمادینِ تساوی را پله‌پله هدایت می‌کند. فرایندی که رادفورد آن را فرارَوی تدریجی از کنش‌های جسمانی به نشانه‌های ریاضی تثبیت‌شده توصیف کرده است. همین الگو در روایت‌های مصاحبه ۴ و ۸ نیز دیده می‌شود، زمانی که معلم با دست به دست کردن کارت‌ها قرینه‌شدن جملات را نشان می‌دهد یا با حرکات نمایشی مانند دور شو و کور شو تغییر علامت و جابه‌جایی را مجسم می‌کند. حرکات اشاره‌ای نقش میانجی‌مفهومی را ایفا می‌کنند و حرکت ذهن را قابل‌مشاهده می‌سازند. به‌طور کلی، این داده‌ها نشان می‌دهد که حرکات بدنی برای معلمان صرفاً همراهِ توضیح نیست، بلکه بخشی از سازوکار ساختِ معناست.

مقوله پنجم، نمادهای بصری عینیت بخش: Vygotsky (1978) *نمادهای* دیداری را یکی از مهم‌ترین ابزارهای روان‌شناختی می‌داند که فرایندهای ذهنی را سازمان‌دهی و تجربه انتزاعی را قابل مشاهده می‌کنند. در همین راستا Radford (2003) نشان می‌دهد که نمودارها، نشانه‌های ترسیمی و بازنمایی‌های نوشتاری، نقش وسایل عینیت‌بخشی را دارند، یعنی سازوکارهایی که به یادگیرنده امکان می‌دهند روابط جبری نادیدنی را در قالب نشانه‌های دیداری تثبیت و پیگیری کند. این نمادهای بصری پلی میان تجربه پیش‌نمادین و صورت‌بندی نمادین ریاضیات ایجاد می‌کنند و زمینه را برای گذار به استدلال جبری فراهم می‌سازند.

"... دانش‌آموزان را برمی‌گردانیم به دوره دبستان. در دوره دبستان می‌گوییم $5 = 3 + \square$. جاخالی چند می‌شود؟ شما این جاخالی را حدس می‌زدید و می‌گفتید می‌شود 2 ..." (مصاحبه شماره ۸)

"سپس حل معادله را اینطوری توضیح داده می‌شود. ابتدا روی تساوی خط عمودی می‌کشیم. می‌گیم این دیواره ... هر کس این طرف دیوار به طرف دیگر دیوار رفت جریمه می‌شود و علامت آن تغییر می‌کند. ..." (مصاحبه شماره ۵).

"... در معرفی معادله و تساوی جبری برای فهم بیشتر دانش‌آموزان از تصویر دو کفه‌ی ترازو استفاده می‌شود به این صورت که بیان می‌شود در یک کفه وزنه قرار داده شده و در کفه‌ی دیگر کیسه‌های هم وزن قرار داده شده و ..." (مصاحبه شماره ۱۱).

"با حرکات دست ترازو را به بچه‌ها نمایش می‌دهیم. ضمن اینکه تصویر ترازو را روی تخته می‌کشیم و می‌گوییم قصدمان به تعادل رسیدن این ترازو است." (مصاحبه شماره ۴).

"برای تفهیم مفهوم رابطه‌ای تساوی و حل معادله به روش موازنه از تصویر یک الاکلنگ و یا کفه‌های یک ترازو استفاده می‌کنیم و ... اگر بر هر طرف مقداری را اضافه کنیم به طرف دیگر هم باید همان مقدار را اضافه کنیم ..." (مصاحبه شماره ۹).

در مصاحبه شماره ۸، استفاده از مربعِ خالی نقش یک نشانه دیداری اولیه را دارد که مقدار مجهول را در سطحی پیش‌نمادین قابل‌فهم می‌کند. در مصاحبه شماره ۵، کشیدن خط عمودی روی تساوی شیوه‌ای است برای مرزبندی دیداری دو طرف معادله رویکردی که مطابق یافته‌های Radford (2022) مشابه استفاده تاریخی از نشانه‌هایی چون خط تیره به‌جای علامت مساوی است. تصاویر ترازو و الاکلنگ در مصاحبه‌های ۴، ۹ و ۱۱ نیز معادله را در قالب یک وضعیت تعادلی قابل مشاهده می‌کنند و به دانش‌آموزان اجازه می‌دهند تا مفهوم موازنه را نه به‌صورت انتزاعی بلکه در قالب یک بازنمایی دیداری دنبال کنند. در مجموع، معلمان با این نمادهای بصری، مفاهیم نامرئی برابری و روابط جبری را عینی و قابل‌دیدن ساخته و بدین‌ترتیب گذار از تجربه پیش‌نمادین به صورت‌بندی نمادین را برای دانش‌آموزان هموار می‌کنند.

مقوله ششم، نمادهای جبری تثبیت کننده: Radford (2002, 2003) نشان می‌دهد که گذار از صورت‌های پیش‌نمادینِ تجربه‌ی ریاضی به زبان جبری، مستلزم گسست از تکیه‌ی صرف بر اشارات بدنی و دیداری و ورود به نظامی است که در آن روابط، ثابت و مستقل از تجربه‌ی حسی بازنمایی می‌شوند. در این فرایند، نمادهای جبری، تجربه‌ی پیشینِ دانش‌آموز را تثبیت می‌کنند و امکان دست‌کاری، جابه‌جایی و استدلال در سطحی انتزاعی‌تر را فراهم می‌سازند. گزیده‌ای از شواهد گفتاری به شرح زیر است:

"... در ابتدایی با حروف انگلیسی آشنا نبودید اما الان دیگر به‌جای جاخالی از حروف انگلیسی استفاده می‌شود ... $x + 3 = 5$ ..." (مصاحبه شماره ۳)

"... حالا روی تخته، ترازو را می‌کشیم و به جای وسط ترازو از علامت تساوی استفاده می‌کنیم. حالا تعداد سیب‌ها را با نماد x نمایش می‌دهیم و بچه‌ها را با نوشتن یک معادله به سمت نماد معادله هدایت می‌کنیم. ..." (مصاحبه شماره ۴).

"... برای آموزش حل معادله ابتدا از مثال کفه ترازو (ترازوهای دو کفه‌ای) استفاده می‌کنیم. ... در یک کفه دو کیسه آرد و در دیگری ۱۲کیلوگرم وزنه ... $x = 6,\ \frac{2x}{2} = \frac{12}{2},\ 2x = 12$ ..." (مصاحبه شماره۷).

"... دیگر با جاخالی کار نمی‌کنیم و به جای جاخالی از متغیرها یعنی حروف انگلیسی مانند x, y, a, b, c استفاده می‌کنیم. مثلاً به‌جای $5 = 3 + \square$ می‌نویسیم $5 = 3 + x$ و به‌جای این‌که بگوییم جاخالی میشه 2 می‌گوییم $x = 2$ ..." (مصاحبه شماره ۸).

براساس گفتار معلمان، گذار از جاخالی‌های ابتدایی به استفاده از حروف جبری، نشانه‌ای از ورود تدریجی دانش‌آموزان به سطحی پایدارتر از بازنمایی است. جایی که مقدار مجهول به‌صورت نمادی تثبیت و قابل‌دست‌کاری می‌شود (مصاحبه ۳ و ۸). اشاره‌ی معلمان به تبدیل نمایش‌های تصویری ترازو به معادلات مکتوب، نشان می‌دهد که تجربه‌ی دیداری اولیه به ساختاری نمادین منتقل می‌شود و روابط به‌شکل صریح و پایدار در قالب $x + 3 = 5$ یا $2\,x = 12$ نوشته می‌شود و مراحل حل تثبیت می‌شود (مصاحبه ۴ و ۷). این شواهد بیانگر آن است که معلمان، با هدایت دانش‌آموزان از بازنمایی‌های مقدماتی به استفاده از نشانه‌های جبری، عملاً فرایند «تثبیت نمادین» را رقم می‌زنند؛ فرایندی که در آن روابط جبری از سطح حسی و موقعیتی جدا می‌شوند و به‌صورت ساختارهای مستقلِ قابل‌استدلال درمی‌آیند.

توجه به یک مرز پداگوژیک باریک در استفاده از نمادها به عنوان ابزار تثبیت‌کننده ضروری است. اگرچه معلمان تلاش می‌کنند با بهره‌گیری از نمادهای جبری یا تمثیل‌های ملموس، مفهوم مجهول را در ذهن فراگیر تثبیت کنند، اما این فرایند نباید به «تثبیتِ نماد به مثابه یک شیء فیزیکی» منجر شود. به عبارت دیگر، در جریان تثبیتِ معنای عباراتی نظیر $2\,x = 12$، این خطر وجود دارد که نماد x به جای آنکه به عنوان یک کمیت عددی مجهول در ذهن دانش‌آموز تثبیت شود، به عنوان برچسبی برای یک شیء فیزیکی (مثلاً خودِ کیسه آرد) درک گردد. در حالی که تعبیر دقیق جبری آن است که $2\,x$ نشان‌دهنده‌ی وزن دو کیسه آرد و عدد ۱۲ بازنمایی‌کننده مقدار وزن مربوطه است. Stacey & Asghari, (2009) صراحتاً هشدار می‌دهند که اگر نمادها به اشتباه به عنوان خودِ اشیاء تثبیت شوند، این تصور به‌طور ناخواسته القاء می‌شود که حروف به‌کاررفته، خودِ شیئی را نشان می‌دهند، که این امر کاملاً مغایر با آموزش مفهوم متغیر است. از این‌رو، همان‌طور که(2010) Sfard & Linchevski, تصریح می‌کنند:« نمادهای جبری به خودی خود حرفی برای گفتن ندارند. درحقیقت، آنچه از نمادها درک می‌شود، وابسته به شرایط مسئله‌ای است که نمادها برای آن به کار رفته‌اند. هم‌چنین این مسئله به هرچه که فرد می‌تواند درک کند و آمادگی توجه کردن به آن را دارد، وابسته است». بنابراین، برای آنکه نمادها به درستی در نقش تثبیت‌کننده عمل کنند، معلم باید صراحتاً تبیین کند که این نمادها بازنمایی‌کننده یک «مقدار عددی مجهول» هستند، نه خودِ اشیاء فیزیکی.

مقوله هفتم، مصنوع به مثابه ابزار ساخت معنا: در چارچوب «میانجی‌گری نشانه‌شناختی[1]»، توضیح داده می‌شود که یک مصنوع زمانی کارکرد آموزشی می‌یابد که در بافت فعالیت و با هدایت معلم، به «پتانسیل نشانه‌ای» خود برسد و میان تجربه عملی و معناهای ریاضی پیوند برقرار کند (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). براساس شواهد، تنها یک معلم در این سطح از مصنوعات بهره گرفته است.

> *"... وقتی جمله‌ها جابه‌جا می‌شوند علامت آن‌ها عوض می‌شود برای فهم این موضوع از کارتهایی استفاده می‌کنم که یک طرف آن خود تک جمله‌ای و طرف دیگر آن قرینه اش نوشته شده است. من می‌گویم من مساوی هستم؛ وقتی یک کارت از یک دست به دست دیگر منتقل می‌شود، پشت و رو می‌شود و این یعنی قرینه ..." (مصاحبه شماره ۴).*

در این روایت، کارت‌های دوطرفه صرفاً ابزار نمایش یا تمرین نیستند، بلکه نقش یک «نشانه‌ی میانجی» را ایفا می‌کنند. جابه‌جایی فیزیکی کارت و تغییر روی آن، تغییر علامت جبری را به تجربه‌ای قابل مشاهده و معنادار تبدیل می‌کند. معلم از

1. Semiotic Mediation

طریق این مصنوع، رابطه‌ی انتزاعی «قرینه بودن» را در قالب کنشی ملموس سازمان می‌دهد. این شیوه استفاده نشان می‌دهد که مصنوع در این تجربه، مستقیماً در ساخت معنای جبری نقش دارد و با تعریف نظری میانجی‌گری نشانه‌ای همسو است.

مقوله هشتم، مصنوع به مثابه ابزار پشتیبان در تعمیق معنا: در چارچوب رویکرد نشانه‌شناختی، پژوهش‌ها نشان می‌دهند که مصنوعات آموزشی می‌توانند به کانون توجه، گفت‌وگو و استدلال ریاضی تبدیل شوند و بدین‌وسیله فعالیت یادگیری را غنی‌تر سازند (Meira, 1998). همچنین مطالعات تجربی نشان داده‌اند که ترازوهای فیزیکی و دیجیتال، به‌ویژه در نسخه‌های پویا، فهم رابطه‌ای از تساوی را ارتقا داده و به تثبیت دانش مفهومی دانش‌آموزان کمک می‌کنند (Bajwa & Perry, 2021; Suh & Moyer-Packenham, 2007; Magruder & Mohr-Schroeder, 2013). در این سطح نیز تنها یک معلم از مصنوع استفاده کرده است.

> *"... برای تعمیق بیشتر از انیمیشن می‌توان استفاده کرد. انیمیشن‌هایی که مثلاً مفهوم تعادل را در حل معادله نشان می‌دهند. معمولا با استفاده از تصویر یک ترازو ساخته شدن و قدم به قدم نشان می‌دهد که چطوری وقتی یک طرف معادله عملی انجام می‌دهی، باید همان عمل را به طرف دیگر هم انجام بدهی تا تعادل حفظ شود. این کار کمک می‌کند که دانش‌آموزان بفهمند معادله مثل یک ترازو است که دو طرفش همیشه باید برابر بماند و اگر تعادل به هم بخورد جواب اشتباه می‌شود. همچنین انیمیشن‌های مرتبط دیگر اکثراً ساده و بصری هستند. با حرکت آهسته، صدا (مثل صدای تعادل یا هشدار) و متن توضیحی، تا بچه‌ها راحت بفهمند. ...»" (مصاحبه شماره ۱۰).*

براساس گفتار معلم، انیمیشن‌های آموزشی به‌عنوان ابزاری برای تقویت، شفاف‌سازی و تثبیت فهم مفهوم تساوی و حل معادله به‌کار گرفته می‌شوند. نمایش تدریجی و گام‌به‌گام اعمال یکسان بر دو طرف معادله، به دانش‌آموزان کمک می‌کند منطق حفظ تعادل را دقیق‌تر دنبال کنند. در این تجربه، مصنوع نقش پشتیبان یادگیری را ایفا می‌کند و با تمرکز توجه و تقویت استدلال، فهم مفهومی دانش‌آموزان را تعمیق می‌بخشد.

بحث و نتیجه‌گیری

نتیجه‌گیری این پژوهش با رویکرد پدیدارنگاری و در چارچوب نظری فرهنگی–اجتماعی ویگوتسکی (Vygotsky, 1997, 1978) و نشانه‌شناسی (Radford, 2002, 2003, 2022) نشان داد که تجربه‌ی معلمان ریاضی در آموزش مفهوم تساوی و معادله، فرایندی چندوجهی و نشانه‌ای است، که از طریق زبان، حرکات بدنی، نمادها و مصنوعات شکل می‌گیرد. پرسش اصلی تحقیق آن بود که معلمان چگونه از این ابزارهای روان‌شناختی بهره می‌گیرند و یافته‌ها آشکار ساخت که زبان در سه نقش اساسی ظاهر می‌شود: نخست به‌عنوان دروازه‌ی ورود به مفهوم و فعال‌سازی ذهنی دانش‌آموزان، سپس به‌عنوان هدایت‌گر پله‌ای در فرایند حل معادله، و در نهایت به‌عنوان تثبیت‌کننده‌ی معنا از طریق استعاره‌ها و روایت‌های فرهنگی. با این حال، تحلیل دقیقِ این روایت‌ها نشان داد که اثربخشی این استعاره‌ها منوط به حفظ تناظر ساختاری با مفاهیم ریاضی است؛ به‌گونه‌ای که استعاره‌های ساختاری (مانند ترازو) مسیر درک هم‌ارزی را هموار می‌کنند، در حالی که تمثیل‌های صرفاً لفظی یا کیفی ممکن است به یادگیری الگوریتمی و بدفهمی‌های پایدار منجر شوند. حرکات بدنی نیز به‌عنوان پلی میان تجربه‌ی جسمانی و معناهای نمادین عمل کردند و مسیر گذار از سطح حسی به سطح نمادین را هموار ساختند. همان چیزی که ویگوتسکی آن را «اشاره به مثابه نوشتن در هوا» (Vygotsky, 1997, p. 133, as cited in Radford, 2003, p. 69) و رادفورد آن را بذرهای رویش نشانه‌های ریاضی می‌داند (Radford, 2009). نمادهای بصری و جبری، از مربع خالی و تصویر ترازو تا معادلات مکتوب، نقش تثبیت‌کننده داشتند و روابط جبری را از سطح موقعیتی جدا کرده و به ساختارهای پایدار و قابل‌استدلال تبدیل کردند. (Radford, 2002, 2003) در این فرایند تثبیت، آگاهی از یک مرز پداگوژیک ظریف ضروری است: پرهیز از تقلیل

نماد به مثابه یک "شیء فیزیکی"؛ تا نمادهای جبری به‌جای برچسبی برای اشیاء، به‌عنوان بازنمایی‌کننده‌ی یک مقدار عددی مجهول در ذهن دانش‌آموز تثبیت گردند. در این میان، مصنوعات آموزشی در تجربه‌ی معلمان به‌صورت محدود اما متمایز ظاهر شدند. در یک تجربه، مصنوع (مانند کارت‌های دوطرفه) به‌مثابه میانجی نشانه‌ای در ساخت معنا به‌کار گرفته شد و در تجربه‌ای دیگر، ابزارهایی همچون انیمیشن‌های آموزشی نقش پشتیبان در تعمیق و تثبیت فهم مفهومی را ایفا کردند. این تفاوت نشان می‌دهد که جایگاه مصنوعات در تجربه‌ی معلمان، بسته به هدف آموزشی، می‌تواند از میانجی معنا تا ابزار تقویت یادگیری تغییر کند. یافته‌ها نشان دادند که ابزارهای مصنوعی نسبت به ابزارهای زبانی، حرکتی و نمادین کمتر مورد استفاده‌ی هدفمند قرار گرفته‌اند؛ مسئله‌ای که نوعی شکاف میان مبانی نظری ویگوتسکی و عمل آموزشی در کلاس‌های ریاضی را آشکار می‌کند. بر اساس دیدگاه فرهنگی–تاریخی ویگوتسکی، ابزارهای فرهنگی اعم از زبان، نشانه یا مصنوع، میانجی‌های اساسی در فرایند درونی‌سازی و رشد شناختی‌اند (Vygotsky, 1981) و همان‌گونه که(Bartolini Bussi & Mariotti, (2008 در نظریه‌ی «میانجی‌گری نشانه‌ای» توضیح داده‌اند، مصنوعات تنها زمانی ابزار روان‌شناختی می‌شوند که در کنش آموزشی حامل معنا و تفکر فرهنگی گردند. کم‌توجهی به این ابزارها در تجربه‌ی معلمان به معنای نادیده‌گرفتن بخشی از میانجی‌گری چندوجهی در یادگیری ریاضی است.

با وجود این دستاوردها، پژوهش حاضر محدودیت‌هایی دارد. نمونه‌ی تحقیق محدود به معلمان پایه هفتم در شهر کرمان بود و داده‌ها صرفاً از طریق مصاحبه‌های نیمه‌ساختاریافته گردآوری شد. بنابراین نتایج قابلیت تعمیم ندارد. همچنین تمرکز بر روایت‌های معلمان باعث شد که تجربه‌ی دانش‌آموزان به‌طور مستقیم بررسی نشود. این محدودیت‌ها خود زمینه‌ای برای پژوهش‌های آینده فراهم می‌کنند. پیشنهاد می‌شود مطالعات بعدی تجربه‌ی دانش‌آموزان را نیز بررسی کنند تا تصویر کامل‌تری از میانجی‌گری ابزارها در یادگیری معادله به دست آید. استفاده از روش‌های ترکیبی مانند مشاهده‌ی کلاسی و تحلیل ویدئویی می‌تواند غنای بیشتری به داده‌ها ببخشد. همچنین، پژوهش‌های آینده باید به طراحی و به‌کارگیری آگاهانه‌ی ابزارهای مصنوعی و فناورانه بپردازند تا نقش آن‌ها در ساخت فرهنگی معنا و درونی‌سازی مفاهیم ریاضی روشن‌تر شود. از منظر نظری، یافته‌های این پژوهش همسو با دیدگاه ویگوتسکی درباره‌ی نقش زبان و ابزارهای فرهنگی در رشد شناختی است و تأییدکننده‌ی تحلیل رادفورد درباره‌ی چندوجهی بودن نظام‌های نشانه‌ای می‌باشد. این نتایج نشان دادند که فرایند «عینیت‌بخشی» به دانش ریاضی در عمل آموزشی معلمان تحقق می‌یابد و ابزارهای مختلف هر یک سهمی در تثبیت تجربه‌ی ریاضی دارند. با این حال، شکاف میان نظریه و عمل در استفاده از مصنوعات نشان می‌دهد که چارچوب نظری نیازمند بازاندیشی در سطح کاربردی است.

نوآوری پژوهش حاضر در آن است که با ترکیب رویکرد پدیدارنگاری و چارچوب نشانه‌شناختی، تجربه‌ی معلمان را در استفاده از ابزارهای روان‌شناختی برای آموزش معادله آشکار کرده و شکاف میان نظریه و عمل در به‌کارگیری مصنوعات را نشان داده است. بدین‌ترتیب، این مطالعه نه‌تنها مکمل پژوهش‌های پیشین است، بلکه با ارائه‌ی شواهد تجربی از کلاس درس، سهمی تازه در غنی‌سازی ادبیات نشانه‌شناسی آموزش ریاضی دارد. افزون بر این، نوآوری پژوهش می‌تواند مسیر تازه‌ای برای طراحی فعالیت‌های آموزشی و پژوهش‌های آینده در زمینه‌ی استفاده‌ی آگاهانه از ابزارهای روان‌شناختی، به‌ویژه ابزارهای مصنوعی و فناورانه بگشاید و به بازاندیشی در شیوه‌های تدریس ریاضی یاری رساند.

ملاحظات اخلاقی

در انجام این پژوهش، کلیه موازین و اصـول اخلاق پژوهش رعایت گردیده و به مشارکت‌کنندگان درباره محرمانه ماندن اطلاعات فردی و استفاده از نتایج صرفاً برای اهداف پژوهشی اطمینان داده شده است.

مشارکت نویسندگان

نویسندگان در تمام مراحل پژوهش و نگارش مقاله مشارکت مساوی داشته‌اند.

تشکر و قدردانی

این مقاله مسـتخرج از هیچ‌گونه طرح پژوهشی یا پایان‌نامه دانشگاهی نبوده و تمامی هزینه‌های آن توسط نویسندگان تأمین شده است. بدین‌وسیله از تمامی معلمان محترمی که با شـــرکت در این پژوهش و اختصـــاص وقت ارزشـــمند خود در فرایند مصـــاحبه‌ها همکاری نمودند، صـــمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

تعارض منافع

«هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است»

بیانیه استفاده از هوش مصنوعی

نویسندگان تصریح می‌نمایند که در فرآیند نگارش، تحلیل داده‌ها و تدوین نتایج این مقاله از هیچ‌گونه ابزار هوش مصنوعی و فناوری‌های مبتنی بر مدل‌های زبانی مولد استفاده نشده است.

Reference:

Abtahi, Y. (2016). Things kids think with: The role of the physical properties of mathematical tools in children's learning in the context of addition of fractions [Doctoral dissertation, University of Ottawa]. **ResearchUOttawa**. https://doi.org/10.20381/RUOR-223

Amini-Far, A., & Karimi-Kia, Kh. (2014). Enhancing students' learning in the first order equation. **Journal of Educational Sciences**, Shahid Chamran University of Ahvaz, 21(2), 23–38. [In Persian]

Bajwa, N., & Perry, M. (2021). Features of a pan balance that may support students' developing understanding of mathematical equivalence. **Mathematical Thinking and Learning**, 21(1), 1–27. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1700587

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. D. English (Ed.), Handbook of international research in mathematics education (2nd ed., pp. 746–783). **Routledge**.

Bosque, J. S. (2025). Common Challenges' Students Face When Learning Linear Equation. **International Journal of Multidisciplinary Research and Analysis,** 8(4), 2100–2115. https://doi.org/ 10.47191/ijmra/v8-i04-65

Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). Thinking mathematically. Heinemann. Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra**. For the Learning of Mathematics,** 9(2), 19–25.

Dahlgren, L. O., and Fallsberg, M. (1991). Phenomenography as a qualitative approach in social pharmacy research. **Journal of social and administrative pharmacy**, 8(4): 150-156.

Faramarzpur, N., & Fadaei, M. R. (2021). Mathematics Teachers' Opinions on the Causes of Educational Mistakes of Student in School Classrooms with an Emphasis on Algebra. **Journal of Theory & Practice in Curriculum,** 9(17), 395–428.

Flick, U. (2006). An introduction to qualitative research. Translated by H. Jalili, 1404). **Ney Publishing**. [In Persian]

Goya, Z., Fadaei, M. R., & Agah, Z. (2013). Mathematics Teachers' Approaches to "Listening" in Mathematics Classes: A phenomenographic approach. **Curriculum Theory and Practice**, 1(1), 27–48

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. **Educational Studies in Mathematics**, 12(3), 317–326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Maffia, A., & Mariotti, M. A. (2018). From using artefacts to mathematical meanings: The teacher's role in the semiotic mediation process. **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**, 4, 50–63. https://doi.org/10.33683/ddm.18.4.3.1

Magruder, R., & Mohr-Schroeder, M. J. (2013). Investigating the use of virtual pan balances in elementary classrooms**. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching**, 32(4), 455–478.

Marton, F. (1981). Phenomenography—Describing conceptions of the world around us. **Instructional Science,** 10(2), 177–200.

Maschietto, M. (2015). Teachers, students and resources in mathematics laboratory. In S. J. Cho (Ed.), Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education (ICME-12) (pp. 527–546**). Springer International Publishing**. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_30

Matthews, P., & Rittle-Johnson, B. (2009). In pursuit of knowledge: Comparing self-explanations, concepts, and procedures as pedagogical tools. **Journal of Experimental Child Psychology**, 104(1), 1–21. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.08.004

McNeil, N., Grandau, L., Knuth, E., Alibali, M., Stephens, A., Hattikudur, S., & Krill, D. (2006). Middle-school students' understanding of the equal sign: The books they read can't help. **Cognition and Instruction**, 24(3), 367–385. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2403_3

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: the emergence of transparency in mathematical activity. **Journal for Research in Mathematics Education**, 29(2), 121-142. https://doi.org/10.2307/749895

Niroo, M. (2025). A Model of the Hidden Curriculum in Mathematics Education Based on a Socio-cultural Approach. **Journal of Curriculum Studies**, 20(77), 77–100. https://doi.org/ 10.22034/jcs.2025.471290.2317

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers (Vol. 17). **New York, USA: Springer**

Ntšohi, M. M. E. (2005). An investigation into the problems encountered by learners and teachers of Grade 9 algebra on understanding linear equations: A critical analysis (Unpublished master's dissertation). **University of South Africa**. http://uir.unisa.ac.za/bitstream/handle/10500/2509/00front.pdf?sequence=1

Núñez, R. (2008). Gestures, diagrams, and the mathematical mind. In L. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education (2nd ed., pp. 357–380). **New York: Routledge**.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. **Mathematical Thinking and Learning**, 5(1), 37–70. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. **For the Learning of Mathematics**, 22(2), 14–23.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. **Educational Studies in Mathematics**, *70*(2), 111–126. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9127-33

Radford, L. (2022). Introducing equations in early algebra. **ZDM – Mathematics Education,** *54*(6), 1151–1167. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01422-x

Reeve, R. A., & Reynolds, F. J. (2001). The role of gesture in co-constructing mathematical understanding. In D. Clarke (Ed.), *Perspectives on practice and meaning in mathematics and science classrooms* (pp. 231–253). **Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.**

Rittle-Johnson, B., Matthews, P., & Taylor, R. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach. **Journal of Educational Psychology**, 103(1), 85–104. http://doi.org/10.1037/a0021334

Robutti, O., Sabena, C., Krause, C., Soldano, C., & Arzarello, F. (2022). Gestures in Mathematics Thinking and Learning. In M. Danesi (Ed.), Handbook of Cognitive Mathematics. **Cham: Springer**.

Sfard, A. & Linchevski, L. (2010). The story of algebra: Advantages and pitfalls of reification (Z. Kamyab & A. H. Asghari, Trans.). **Roshd-e Amouzeshe Riazi,** 27(3), 4–12; 28(1), 13–19; 28(2), 17–25.

Stacey, K. & Asghari, A. H. (2009). Moving from arithmetic thinking to algebraic thinking. **Roshd-e Amouzeshe Riazi** [Mathematics Education Journal], 26(3), 3–11. [In Persian].

Stacey, K. & Vincent, J. (2009). Modes of reasoning in explanations in Australian eighth-grade mathematics textbooks. **Educational Studies in Mathematics**, 72(2), 271–288. http://doi.org/10.1007/s10649-009-9193-1

Schliemann, A. D., Carraher, D.W., Goodrow, A., Caddle, M. C., & Porter, M. (2013). Equations in Elementary School, Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lindmeier, A. M. & Heinze, A., (Eds.); Kiel, Germany: **PME**. 4, 161-168.

Stephens, A., Knuth, E., Blanton, M., Isler, I., Gardiner, A., & Marum, T. (2013). Equation structure and the meaning of the equal sign: The impact of task selection in eliciting elementary students' understandings. **Journal of Mathematical Behavior**, 32(2), 173–182. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.02.001

Stephens, A., Sung, Y., Strachota, S., Torres, R., Morton, K., Gardiner, A., Blanton, M., Knuth, E., & Stroud, R. (2022). The role of balance scales in supporting productive thinking about equations among diverse learners. **Mathematical Thinking and Learning,** 24(1), 1–18. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1793055

Suh, J. M., & Moyer-Packenham, P. S. (2007). Developing students' representational fluency using virtual manipulatives. **Mathematics Teaching in the Middle School,** 13(3), 208–216.

Tossavainen, T., Attorps, I., & Väisänen, P. (2011). On Mathematics Students Understanding of the Equation Concept. **Journal of Far East Mathematical Education**, 6 (2), 127-147. https://doi.org/10.17654/0973563111013

Van de Pol, J., Volman, M., & Beishuizen, J. (2010). Scaffolding in teacher–student interaction: A decade of research. **Educational Psychology Review**, *22*(3), 271–296. https://doi.org/10.1007/s10648-010-9127-6

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes. Cambridge, MA**: Harvard University Press.**

Vygotsky, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. In J. V. Wertsch (Ed.), The concept of activity in Soviet psychology (pp. 134–143). **Armonk, NY: Sharpe**.

Vygotsky, L. S. (1997). The collected works of L. S. Vygotsky, Vol. 4: The history of the development of higher mental functions (R. W. Rieber, Ed.). **New York: Plenum Press.**

Wertsch, J. V. & Addison Stone, C. (1995). The concept of internalization in Vygotsky's account of the genesis of higher mental functions. In J. V. Wertsch (Ed*)*, Culture, communication and cognition: Vygotskian perpsectives. **Cambridge University Press**.

Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. **Journal of Child Psychology and Psychiatry,** 17(2), 89–100.