Iranian Journal of curriculum studies

ISSN: 1735-4986
https://www.jcsicsa.ir

VOL (21), No. 81, 2026, pp: 179-200

Analysis of Students' Cognitive Modeling Routes based on Mathematical Thinking Styles

Fatemeh Delaviz[1], Mahdokht Naghibi Beidokhti*[2], Reza Heidari Ghezeljeh[3]

1. M.Sc. in Mathematics Education, Farhangian University, P.O. Box 14665-889, Tehran, Iran. ftm.delaviz2@gmail.com
2. ***Corresponding Author**:* Assistant Professor, Department of Mathematics Education, Farhangian University, P.O. Box 14665-889, Tehran, Iran. E-mail: mnb5172@cfu.ac.ir
3. Assistant Professor, Department of Mathematics Education, Farhangian University, P.O. Box 14665-889, Tehran, Iran. Email: reza.heidari.gh@cfu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Keywords:
Mathematical thinking styles, Cognitive modeling, Modeling routes, Mathematical modeling, Qualitative research.

Article history:
Received: 11 May 2026
Reviewed: 16 June 2026
Accepted: 27 June 2026

ABSTRACT

This qualitative case study was conducted to analyze students' cognitive modeling routes based on their mathematical thinking styles. The participants were 23 tenth-grade students from a school in Iran, six of whom were selected after their mathematical thinking styles had been identified and assigned to three pairs, each representing a different thinking style, for an in-depth analysis of their cognitive modeling routes. Data were collected using three mathematical tasks designed to identify students' mathematical thinking styles and one mathematical modeling problem. The data were analyzed using the performance characteristics associated with the steps of Borromeo Ferri's cognitive modeling cycle. The findings revealed that students' cognitive modeling routes differed according to their mathematical thinking styles. These differences were evident in the sequence in which they moved through the steps of the modeling cycle and in the types of representations they used during problem solving. Moreover, focusing on key information, eliminating irrelevant information, selecting appropriate representations, and engaging in ongoing validation contributed to greater accuracy and efficiency in the modeling process. These findings may inform the design of mathematical modeling activities in mathematics curricula.

Citation (APA): Delaviz. F, Naghibi Beidokhti. M, Heidari Ghezeljeh. R (2026). Analysis of students' cognitive modeling routes based on Mathematical thinking styles. **Iranian Journal of curriculum studies. 21 (81), 179-200**
https://doi.org/10.0.86.18/jcs.2026.591351.2640

© The Author(s).
Publisher: Iranian Curriculum Studies

Extended Abstract

Introduction:

Mathematical modeling has become an important component of mathematics education because it connects school mathematics with real-world situations and enables students to analyze and solve real-world problems. Accordingly, mathematical modeling and related competencies have gained increasing importance in mathematics curricula worldwide. The cognitive perspective on mathematical modeling focuses on the cognitive processes students engage in during modeling and examines these processes through a specific cognitive framework. The theory of mathematical thinking styles provides a framework for analyzing students' cognitive activities during the mathematical modeling process. Previous international studies applying the mathematical thinking styles framework to the analysis of modeling routes have primarily focused on certain thinking styles, leaving the role of other styles in the modeling process less explored. Moreover, previous studies on mathematical modeling in Iran have primarily addressed various aspects and outcomes of mathematical modeling, with limited attention to students' cognitive modeling routes and their differences in relation to mathematical thinking styles. Drawing on the theory of mathematical thinking styles and Borromeo Ferri's cognitive modeling cycle, this qualitative study investigated students' cognitive modeling routes in relation to their mathematical thinking styles.

Methodology:

This qualitative case study involved 23 tenth-grade students from a school in Iran. After their mathematical thinking styles had been identified in the first stage of the study, six students were selected and assigned to three pairs for the second stage. Data were collected using three mathematical tasks designed to identify students' mathematical thinking styles and one mathematical modeling problem. Students' responses were analyzed using the performance characteristics associated with the steps of Borromeo Ferri's cognitive modeling cycle. The cycle consists of six phases: the real situation, mental representation of the situation, real model, mathematical model, mathematical results, and real results.

Results:

The modeling route of the students with a visual thinking style comprised five micro-cycles. These students relied primarily on visual representations and imagery; however, they encountered difficulties in moving from the real model to the mathematical model and engaged in validation only to a limited extent, mainly at an intuitive level. The modeling route of the students with an analytical thinking style also comprised five micro-cycles. These students tended to move more quickly into the mathematical world and begin working mathematically. However, difficulties in identifying and representing key information prompted them to return to the phases of constructing a mental representation of the situation and developing a real model. The modeling route of the students with a conceptual thinking style comprised four micro-cycles. These students readily completed the mathematizing step by using a simple visual representation and validated their answers twice by drawing on the assumptions and information provided in the problem, as well as logical reasoning.

Conclusion:

The findings revealed differences in the cognitive modeling routes of students with visual, analytical, and conceptual thinking styles, including the conceptual style, which has received limited attention in previous research on students' modeling routes. These differences were reflected in the number of micro-cycles, the sequence in which students moved through the steps of the modeling cycle, and the

types and range of representations they used during problem solving. Furthermore, focus ing on key information, eliminating irrelevant information, selecting appropriate representations, and engaging in ongoing validation contributed to greater accuracy and efficiency in the modeling process. The micro-cycles observed in students' modeling routes reflected the cyclical and dynamic nature of the mathematical modeling process, consistent with previous research. These findings highlight the importance of considering students' cognitive differences in modeling instruction and may inform the design and organization of modeling activities within mathematics curricula.

Ethical Considerations

This study was conducted in accordance with the principles of research ethics. Before the study began, its purpose and procedures were explained to the students, and student assent and parental consent were obtained. Participation was voluntary, and students had the right to withdraw from the study at any stage. Participants' identities and information were kept confidential, and pseudonyms or codes were used when reporting the findings. Research data and records were stored securely and used solely for research purposes.

Authors' Contributions

Fatemeh Delaviz: Contributed to the study design; conducted the study; collected and analyzed the data; interpreted the findings; wrote the initial draft; and contributed to reviewing and revising the manuscript.

Mahdokht Naghibi Beidokhti: Conceptualized and designed the study; provided scientific leadership and supervision; contributed to data analysis and interpretation of the findings; contributed to drafting the manuscript; and critically reviewed, substantially revised, and further developed the manuscript.

Reza Heidari Ghezeljeh: Contributed to the study design and its refinement, and provided scholarly feedback to support the review and revision of the manuscript.

All authors have read and approved the final manuscript and agree to be accountable for their respective contributions to the work.

Conflict of Interest

The authors declare that they have no financial or non-financial conflicts of interest relevant to this article.

AI Disclosure Statement

During the preparation of this manuscript, AI tools were used solely for language editing and to improve clarity and readability. The authors reviewed and edited the resulting content and take full responsibility for the accuracy and integrity of the final manuscript.

مطالعات برنامه درسی

شاپا: ۱۷۳۵-۴۹۸۶

https://www.jcsicsa.ir

دوره ۲۱، شماره ۸۱، تابستان ۱۴۰۵: ۲۰۰ -۱۷۹

تحلیل مسیرهای مدل‌سازیِ شناختی دانش‌آموزان بر اساس سبک‌های تفکر ریاضی

فاطمه دلاویز[۱]؛ مهدخت نقیبی بیدختی*[۲]؛ رضا حیدری قزلجه[۳]

۱. کارشناسی ارشد گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران. ftm.delaviz2@gmail.com

۲. ***نویسنده مسئول***، استادیارگروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۸۸۹-۱۴۶۶۵، تهران، ایران. mnb5172@cfu.ac.ir

۳. استادیار گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۸۸۹-۱۴۶۶۵، تهران، ایران. reza.heidari.gh@cfu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:

مقاله اصیل پژوهشی

کلیدواژه‌ها:

سبک‌های تفکر ریاضی، مدل‌سازی شناختی، مسیرهای مدل‌سازی، مدل‌سازی ریاضی، پژوهش کیفی.

تاریخچه مقاله:

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۲/۲۱

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۵/۰۳/۲۶

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۴/۰۶

چکیده

مقاله حاضر با روش مطالعه موردی و با هدف تحلیل مسیرهای مدل‌سازی شناختی دانش‌آموزان بر حسب سبک‌های تفکر ریاضی انجام شد. شرکت‌کنندگان پژوهش ۲۳ دانش‌آموز پایه دهم بودند که از بین آنان، ۶ نفر در سه گروه دونفری با سبک‌های تفکر ریاضیِ متفاوت برای تحلیل مسیرهای مدل‌سازی انتخاب شدند. ابزار گردآوری داده‌ها شامل سه مسئله مرتبط با سبک‌های تفکر ریاضی و یک مسئله مدل‌سازی بود. داده‌های پژوهش با استفاده از مشخصه‌های گام‌های چرخه مدل‌سازی شناختی بروموفری تحلیل شدند. نتایج نشان داد که مسیرهای مدل‌سازی شناختی دانش‌آموزان بر حسب سبک تفکر ریاضی آنان متفاوت است و این تفاوت‌ها در ترتیب و نحوه طی کردنِ گام‌های چرخه و نیز در نوع بازنمایی‌های به‌کاررفته در فرایند حل مسئله مشاهده شد. همچنین یافته‌ها نشان داد که تمرکز بر داده‌های کلیدی، حذف اطلاعات غیرضروری، انتخاب بازنمایی‌های مناسب و اعتبارسنجیِ مستمر، دقت و کارآمدیِ فرایند مدل‌سازی را افزایش می‌دهد. یافته‌های این پژوهش می‌تواند در طراحی فعالیت‌های مدل‌سازی در برنامه درسی ریاضی مورد استفاده قرار گیرد.

استناد به این مقاله: دلاویز، فاطمه؛ نقیبی بیدختی، مهدخت و حیدری قزلجه، رضا (۱۴۰۵). تحلیل مسیرهای مدل‌سازیِ شناختی دانش‌آموزان بر اساس سبک‌های تفکر ریاضی، **فصلنامه مطالعات برنامه درسی ایران**. (۸۱)۲۱. ۲۰۰-۱۷۹. https://doi.org/10.0.86.18/jcs.2026.591351.2640

© نویسندگان

ناشر: **انجمن مطالعات برنامه درسی ایران.**

مقدمه

مدل‌سازی ریاضی[1]، به‌عنوان یکی از فرایندهای مهم آموزش ریاضی، در دهه‌های اخیر به یکی از محورهای اصلی پژوهش در آموزش ریاضی تبدیل شده است (Niss et al., 2007). این فرایند صرفاً بر حل مسئله ریاضی تکیه ندارد، بلکه با ایجاد پیوند میان دانش ریاضی مدرسه‌ای و کاربردهای آن در زندگی فردی و اجتماعی، زمینهٔ درگیر شدن دانش‌آموزان با مسائل پیچیدهٔ جهان واقعی و چالش‌های اجتماعی را فراهم می‌کند (Bulut & Borromeo Ferri, 2025).

در برنامه‌های درسی معاصر، مدل‌سازی، به‌عنوان یکی از مؤلفه‌های اساسی یادگیری ریاضی وپرورش توانایی‌های شناختی و کاربردی دانش‌آموزان مطرح است که همزمان، نقش مهمی در آماده‌سازی آنان برای فعالیت در عرصه‌های علمی، فناوری، مهندسی و ریاضی دارد (Siller et al., 2024; Torabi et al., 2026). در برنامه درسی هسته مشترک، مدل‌سازی ریاضی به عنوان یکی از هشت استاندارد اساسی شناخته شده است (Porter et al., 2011). در نظام آموزشی ایران نیز، ضرورت توانمندسازی دانش‌آموزان در تحلیل و حل مسائل دنیای واقعی به‌صراحت در اسناد بالادستی، از جمله «برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران»، مورد تأکید قرار گرفته است. به طور خاص در برنامه درسی ریاضی، مدل‌سازی به‌عنوان یکی از شایستگی‌های بنیادین یادگیری معرفی شده و تصریح می‌شود که دانش‌آموزان باید بتوانند موقعیت‌های واقعی را تحلیل کرده و برای تبیین یا حل مسئله، مدل‌های مناسب بسازند (Supreme Council of Education, 2012).

همزمان با افزایش توجه پژوهشگران به حوزه مدل‌سازی، دیدگاه[2]های مختلف مدل‌سازی بر اساس اهداف و کارکردهای آن‌ها دسته‌بندی شدند (Kaiser & Sriraman, 2006, as cited in Borromeo Ferri, 2018). در میان این دیدگاه‌های مختلف، دیدگاه مدل‌سازی شناختی[3]، با تمرکز بر تحلیل فرایندهای ذهنی و شناختی دانش‌آموزان در حل مسئله مدل‌سازی، بر درک عمیق فرایند مدل‌سازی و توسعهٔ شایستگی[4]های مرتبط با آن تأکید دارد (Krawitz et al., 2025; Cai et al., 2014). تحلیل این فرایندهای شناختی و ذهنی مستلزم بهره‌گیری از یک چارچوب یا نظریه شناختی مشخص است تا بتوان نحوه تفکر دانش‌آموزان را در حل مسئله‌های مدل‌سازی، از طریق تصمیم‌گیری‌ها، راهبردها و شیوه‌های بازنماییِ[5] به‌کاررفته، به‌صورت نظام‌مند بررسی کرد (Borromeo Ferri, 2015a; Hankeln, 2020).

در این راستا، Borromeo Ferri (2010) با معرفی نظریه «سبک‌های تفکر ریاضی[6]» به‌عنوان پیوندی میان مدل‌سازی ریاضی و فرایندهای شناختی، نقش این سبک‌ها را در شکل‌گیری مسیرهای متفاوت مدل‌سازی دانش‌آموزان تبیین کرد و بستری مناسب برای تحلیل شیوه تفکر فردی در حل مسئله‌های مدل‌سازی فراهم آورد. سبک‌های تفکر ریاضی، الگوهای ترجیحی دانش‌آموزان را در درک، پردازش و بازنمایی مفاهیم و روابط ریاضی در فرایند حل مسئله توصیف می‌کنند (Borromeo Ferri & Kaiser, 2003; Borromeo Ferri, 2010; Shahbari, 2020).

با وجود تأکید پژوهش‌های بین‌المللی بر اهمیت تحلیل فرایندهای شناختی در مدل‌سازی ریاضی، بیشتر مطالعات انجام شده بر توصیف مراحل چرخه یا ارزیابی محصول نهاییِ مدل‌سازی متمرکز بوده‌اند و کمتر به بررسی مسیرهای مدل‌سازی بر پایه یک چارچوب شناختی منسجم پرداخته‌اند. از سوی دیگر، پژوهش‌های بین‌المللی که چارچوب سبک‌های تفکر ریاضی را در تحلیل مسیرهای مدل‌سازی به کار گرفته‌اند، بیشتر به بررسی تعداد محدودی از سبک‌های تفکر پرداخته‌اند و درباره نقش برخی دیگر از سبک‌های تفکر در فرایند مدل‌سازی، شواهد اندکی ارائه داده‌اند.

1. Mathematical modeling
2. Perspective
3. Cognitive modeling perspective
4. Competency
5. Representation
6. Mathematical thinking styles

در پژوهش‌های داخلی نیز، تمرکز مطالعات انجام شده بیشتر بر جنبه‌های کلیِ فرایند مدل‌سازی یا اثربخشی روش‌های تدریس مدل‌سازی بوده است. ازاین‌رو، تحلیل مسیرهای مدل‌سازی[1] شناختی دانش‌آموزان با تکیه بر چارچوب سبک‌های تفکر ریاضی، همچنان یکی از خلأهای پژوهشی این حوزه در ایران به شمار می‌آید. بر این اساس، هدف پژوهش حاضر، شناسایی و تحلیل مسیرهای مدل‌سازی شناختی دانش‌آموزان بر مبنای چرخه مدل‌سازیِ[2] Borromeo Ferri (2010) و بررسی تفاوت این مسیرها بر اساس سبک‌های تفکر ریاضی است.

انتظار می‌رود یافته‌های این پژوهش، علاوه بر گسترش دانش موجود درباره فرایندهای شناختی در مدل‌سازی، بتواند مبنایی برای طراحی فعالیت‌ها و برنامه‌های درسی متناسب با تفاوت‌های شناختی دانش‌آموزان در آموزش ریاضی باشد.

پیشینه پژوهش

مدل‌سازی ریاضی به‌عنوان یکی از مفاهیم بنیادین در پیوند میان ریاضیات و واقعیت شناخته شده است. از این‌رو، در دهه‌های اخیر، مدل‌سازی و شایستگی‌های مرتبط با آن به یکی از مؤلفه‌های مهم برنامه‌های درسی ریاضی در بسیاری از نظام‌های آموزشی تبدیل شده‌اند (Stillman, 2019; Niss & Blum, 2020).

این فرایند را می‌توان به صورت یک چرخه یا چرخه‌هایی شامل مجموعه‌ای از مراحل[3] و گام‌ها[4] در نظر گرفت. هر مرحله، بیانگر وضعیت مشخصی از فرایند مدل‌سازی است که دانش‌آموز طی حل مسئله مدل‌سازی به آن دست می‌یابد. هر گام (یا گذار[5])، مجموعه‌ای از فعالیت‌های شناختی است که موجب انتقال از یک مرحله به مرحله دیگر می‌شود (Borromeo Ferri, 2010; Shahbari, 2020; Schukajlow et al., 2023).

پژوهش‌های مدل‌سازی در سال‌های اخیر توجه بیشتری به بررسی فرایندهای شناختی دانش‌آموزان در جریان حل مسئله نشان داده‌اند، تغییری که زمینهٔ شکل‌گیری دیدگاه مدل‌سازی شناختی را فراهم کرد و به گسترش آن در پژوهش‌های این حوزه انجامید (Matos & Carreira, 1995; Blum & Leiss, 2005; kaiser & Sriraman, 2006; Ay & Ostkirchen, 2021; Bulut & Borromeo Ferri, 2025).

در این راستا، Blum and Leiss (2005) چرخه‌ای برای فرایند مدل‌سازی شناختی ارائه دادند که چگونگی درک دانش‌آموز از مسئله را بخشی اساسی از فرایند مدل‌سازی در نظر می‌گرفت و بستری برای تحلیل نحوه اندیشیدن، تصمیم‌گیری و شکل‌گیری مسیر مدل‌سازی یادگیرندگان در جریان حل مسئله‌های مدل‌سازی فراهم می‌آورد. Borromeo Ferri (2006) نیز با اقتباس از این چرخه، چرخه‌ای ارائه کرد که ضمن تأکید بر جنبه‌های شناختی فرایند مدل‌سازی، برای بررسی سبک‌های تفکر ریاضی دانش‌آموزان طراحی شده بود. این چرخه به‌سبب توجه هم‌زمان به نحوه بازنمایی اطلاعات و فعالیت‌های شناختی، ابزاری مناسب برای پژوهش در دیدگاه مدل‌سازی شناختی و نیز آموزش مدل‌سازی به دانش‌آموزان و معلمان است (Borromeo Ferri, 2018; Vorhölter et al., 2019). در تبیین مبانی نظری این دیدگاه، Borromeo Ferri (2015a) تأکید کرد که تحلیل فرایند مدل‌سازی از منظر شناختی، مستلزم بهره‌گیری از یک چارچوب نظری شناختی مشخص است.

از سوی دیگر، همزمان با گسترش پژوهش‌های مدل‌سازی، مطالعات دیگری نیز به بررسی شیوه تفکر یا سبک‌های تفکر افراد در حل مسئله‌های ریاضی پرداختند. این مطالعات نشان دادند که نوع بازنمایی و پردازش اطلاعات، به تفاوت در شیوه

1. Modeling routes
2. Modeling cycle
3. Phases
4. Steps
5. Transition

حل مسئله می‌انجامد (Klein, 1892, as cited in Borromeo Ferri & Kaiser, 2003; Hadamard, 1945, as cited in Borromeo Ferri & Kaiser, 2003).

در این راستا، Burton (1999) با ارائه یک طبقه‌بندی جدید از سبک‌های تفکر ریاضی دانشمندان ریاضی، به سه شیوه تفکر بصری[1]، تحلیلی[2] و مفهومی[3] اشاره کرد. از سوی دیگر، Borromeo Ferri and Kaiser (2003) چارچوب طبقه‌بندی برتون را در مطالعه سبک‌های تفکر ریاضی دانش‌آموزان به کار گرفتند و سبک‌های آنان را بر اساس نحوه درک و پردازش اطلاعات و نوع بازنمایی‌های به‌کاررفته در حل مسئله بررسی کردند. یافته‌های پژوهش آنان، سه سبک متمایز تفکر ریاضیِ بصری، تحلیلی و تلفیقی[4] را شناسایی کرد.

در ادامه، Borromeo Ferri (2012) نشان داد که انتخاب رویکرد آموزشی معلم بدون توجه به سبک‌های تفکر ریاضی دانش‌آموزان می‌تواند مانعی برای یادگیری ریاضی باشد. دامنهٔ این مطالعات بعدها به مقایسهٔ فرهنگ‌ها گسترش یافت. نتایج این مقایسه نشان داد که دانش‌آموزان در فرهنگ‌های غربی گرایش بیشتری به سبک تفکر ریاضی بصری داشتند، درحالی‌که در فرهنگ‌های شرقی، سبک تفکر ریاضی تحلیلی رایج‌تر بود (Borromeo Ferri, 2015b). در همین راستا، با بهره‌گیری از پرسشنامهٔ سبک‌های تفکر ریاضی Borromeo Ferri (2015b)، سه سبک تفکر ریاضی تحلیلی، بصری و تلفیقی در میان دانش‌آموزان ترکیه شناسایی شدند (Akçakın & Kaya, 2020). نتایج این پژوهش نشان داد که این چارچوب، قابلیت شناسایی تفاوت‌های فردی در شیوهٔ تفکر ریاضی دانش‌آموزان در بافت‌های فرهنگی دیگر را نیز دارد.

Borromeo Ferri (2010, 2011) برای نخستین‌بار از این چارچوب برای تحلیل فرایندهای مدل‌سازی شناختی بهره گرفت و نشان داد که مسیر مدل‌سازی دانش‌آموزان با سبک‌های تفکر ریاضی متفاوت، یکسان نیست. در همین راستا، Shahbari (2020) نیز نشان داد که سبک‌های تفکر ریاضی بر چگونگی شکل‌گیری مسیر مدل‌سازی دانش‌آموزان، به‌ویژه بر ترتیب و نحوهٔ اجرای گام‌های فرایند مدل‌سازی، تأثیر قابل‌توجهی دارند.

با وجود پژوهش‌های بین‌المللی انجام‌شده در زمینه به‌کارگیری چارچوب سبک‌های تفکر ریاضی برای تحلیل فرایندهای مدل‌سازی شناختی، در ایران پژوهشی انجام نشده است که مدل‌سازی شناختی را بر اساس چارچوب سبک‌های تفکر ریاضی تحلیل کرده باشد. همچنین، مطالعه‌ای داخلی، در حوزه سبک‌های تفکر ریاضی نیز یافت نشد. با این‌حال، پژوهش‌هایی در زمینه مدل‌سازی ریاضی انجام شده است. این پژوهش‌ها بیشتر با بهره‌گیری از دیدگاه‌ها و چرخه‌های مختلف مدل‌سازی، به بررسی نقش مدل‌سازی در آموزش مفاهیم ریاضی، بهبود عملکرد یادگیرندگان، پیوند میان دنیای واقعی و دنیای ریاضی و شایستگی‌های مدل‌سازی پرداخته‌اند. به عنوان نمونه، در سطح آموزش عالی، آموزش مدل‌سازی بر مبنایِ چرخهٔ مدل‌سازی شناختیِ Borromeo Ferri (2010)، با ارتقای درک مفاهیم و توانایی دانشجویان در تبیین پدیده‌های واقعی همراه بوده است (Rafiepour, 2015). در پژوهشی دیگر، با تبیین مراحل چرخه مدل‌سازیِ Galbraith and Stillman (2006)، بر نقش تجربه‌های زیسته دانش‌آموزان در پیشبرد حل مسئله‌های مدل‌سازی و ایجاد پیوند میان دنیای واقعی و دنیای ریاضی تأکید شد (Abdollah pour & Rafiepour, 2017). همچنین، بررسی رابطه میان سطوح تفکر بر اساس نظریه SOLO[5] و شایستگی‌های مدل‌سازی دانش‌آموزان نشان داد که سطح تفکر ریاضی آنان تأثیر قابل‌توجهی بر توانایی‌شان در مدل‌سازی ریاضی دارد (Shahmohammadi & Reyhani, 2019).

1. Visual
2. Analytical
3. Conceptual
4. Integrated
5. Structure of the Observed Learning Outcome

در پژوهشی دیگر، آموزش کسرها بر پایه مسئله‌های مدل‌سازی و با بهره‌گیری از چرخه مدل‌سازی Verschaffel (2002) بررسی شد و ارتقای عملکرد دانش‌آموزان در حل مسئله‌های کسری مشاهده گردید (Salamat, 2021). همچنین، به‌کارگیری چرخه مدل‌سازیِ Blum and Leiss (2005) در تدریسِ مبتنی بر مسئله‌های بازپاسخ، با بهبود عملکرد دانش‌آموزان در فرایند مدل‌سازی همراه بود (Asadi & Heidari Ghezeljeh, 2024). در همین راستا، افزایش قابل‌توجه عملکرد دانش‌آموزان و علاقه آنان به ریاضی در پی آموزش از طریق مسئله‌های مدل‌سازیِ بازپاسخ مشاهده شد (Gholami et al., 2025).

با این حال، تمرکز این پژوهش‌ها بر پیامدها و ابعاد مختلف مدل‌سازی ریاضی بوده و تحلیل مسیرهای مدل‌سازی شناختی دانش‌آموزان بر اساس چارچوب شناختی سبک‌های تفکر ریاضی مورد توجه قرار نگرفته است.

چارچوب نظری پژوهش

با توجه به هدف پژوهش حاضر که تحلیل مسیرهای مدل‌سازی شناختی دانش‌آموزان و بررسی تفاوت این مسیرها بر اساس سبک‌های تفکر ریاضی بود، در این بخش ابتدا به تبیین چارچوب شناختیِ «سبک‌های تفکر ریاضی» بر اساس تعریف‌های Burton (1999) و Borromeo Ferri and Kaiser (2003) پرداخته می‌شود. سپس، چرخه مدل‌سازی شناختی ارائه‌شده توسط Borromeo Ferri (2010)، به‌عنوان چارچوب اصلی پژوهش، معرفی می‌گردد.

سبک‌های تفکر ریاضی

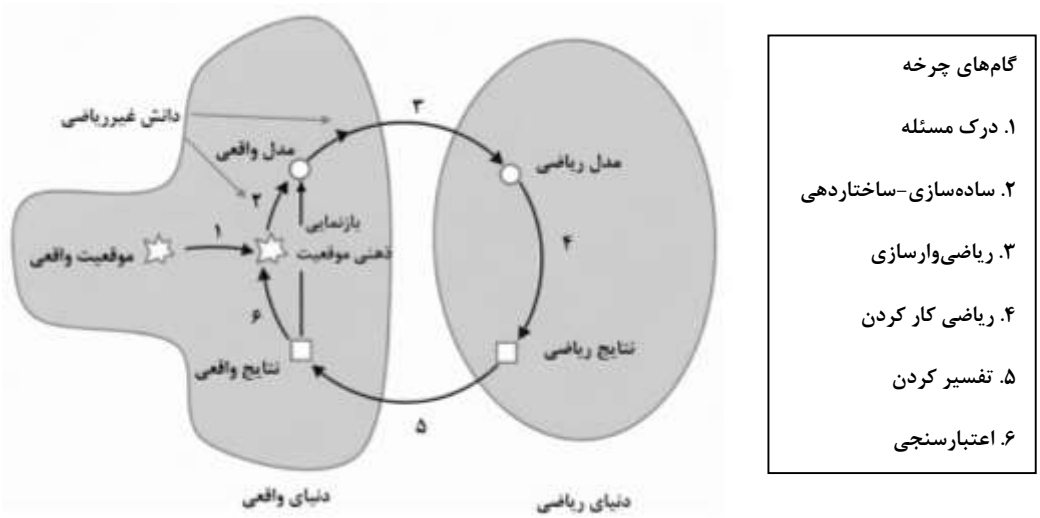
سبک‌های تفکر ریاضی به شیوه‌های ترجیحی افراد در درک، پردازش و نحوه ارائه مفاهیم و روابط ریاضی اشاره دارند. این مفهوم نشان‌دهنده تفاوت‌های فردی در نحوه بهره‌گیری از توانایی‌ها و مهارت‌های ریاضی برای حل مسئله ریاضی است. براین اساس، سبک‌های تفکر ریاضی بر نقش الگوهای عادتی پایدار فرد در شیوه درک و پردازش اطلاعات و مفاهیم ریاضی، تأکید کرده‌اند (Burton, 1999; Borromeo Ferri & Kaiser, 2003; Borromeo Ferri, 2010).

Burton (1999) سه سبک تفکر ریاضی بصری، تحلیلی و مفهومی را معرفی کرده است. مطابق طبقه‌بندی او، سبک بصری شیوه‌ای از تفکر تصویرمحور است که تصویرها غالباً پویا و در حال تغییر هستند. درحالی که سبک تحلیلی، شیوه‌ای از تفکر نمادین و جبری است و سبک مفهومی، شیوه تفکرِ مبتنی بر درک ایده‌ها و الگوها و همچنین طبقه‌بندی مفاهیم ریاضی است. پس از او، Borromeo Ferri and Kaiser (2003) با تمرکز بر عملکرد واقعی دانش‌آموزان دوره متوسطه، این سبک‌ها را بسط دادند. ازنظر آنان، سبک تفکر بصری ریاضی به شیوه‌ای ترجیحی از تفکر اشاره دارد که در آن، مفاهیم و روابط ریاضی بیشتر از طریق بازنمایی‌های تصویری و تصورات ذهنی پردازش می‌شوند و تصویرسازی‌های ذهنی، معمولاً با تجربه‌های شخصی فرد پیوند دارند. ازطرف دیگر، ویژگی سبک تفکر تحلیلی، شیوه‌ای ترجیحی از تفکر است که در آن، مفاهیم و روابط ریاضی بیشتر از طریق بازنمایی‌های نمادین، جبری و کلامی، درک و پردازش و ارائه می‌شوند. بالاخره، سبک تفکر ریاضی مفهومی، بر پایه ایده‌ها و مفاهیم ریاضی شکل می‌گیرد و فرد از مفاهیم، برای تحلیل، طبقه‌بندی و ساخت دانش استفاده می‌کند. همچنین Borromeo Ferri and Kaiser (2003)، با مشاهده الگوهای حل مسئله در دانش‌آموزان، به وجود سبکی بینِ دو سبک بصری و تحلیلی اشاره کردند که در آن، فرد بسته به ماهیت مسئله، می‌تواند بین رویکردهای بصری و تحلیلی جابه‌جا شود.

چرخه مدل‌سازی شناختی Borromeo Ferri (2010)

به منظور تحلیل مسیرهای مدل‌سازی دانش‌آموزان بر اساس سبک‌های تفکر ریاضی، Borromeo Ferri (2010) با اقتباس از چرخه مدل‌سازی Blum and Leiss (2005)، چرخه‌ای ارائه کرد که ضمن تأکید بر جنبه‌های شناختیِ فرایند مدل‌سازی، برای تحلیل این فرایند از منظر سبک‌های تفکر ریاضی تطبیق یافته بود. این چرخه فرایند مدل‌سازی را در شش مرحله

«موقعیت واقعی[۱]»، «بازنمایی ذهنی موقعیت[۲]»، «مدل واقعی[۳]»، «مدل ریاضی[۴]»، «نتیجه ریاضی[۵]» و «نتیجه واقعی[۶]» معرفی کرده و از طریق شش گام «درک مسئله[۷]»، «ساده‌سازی-ساختاردهی[۸]»، «ریاضی‌وارسازی[۹]»، «ریاضی کار کردن[۱۰]»، «تفسیر کردن[۱۱]» و «اعتبارسنجی[۱۲]» تبیین می‌کند (شکل ۱). بروموفری در این چرخه، دانش غیرریاضی[۱۳]شامل تجربیات شخصی و شناخت زمینه مسئله را به‌عنوان عاملی تأثیرگذار در فعالیت‌های شناختیِ مرتبط با حل مسئله از جمله ساده‌سازی مسئله، ساخت فرضیات جدید و اعتبارسنجی نتایج، در نظر می‌گیرد.



شکل ۱. چرخهٔ مدل‌سازی شناختیِ Borromeo Ferri (2010)

این چرخه، ماهیت تکرارشونده و غیرخطی دارد، از این رو ممکن است دانش‌آموزان لزوماً مراحل چرخه مدل‌سازی را به صورت متوالی طی نکنند و در حین حل مسئله، بارها به مراحل قبلی بازگردند یا برخی گام‌ها را تکرار کنند. این رفت و برگشت‌ها و تکرارها، «ریزچرخه‌ها[۱۴]»یی را تشکیل می‌دهند که مجموع آن‌ها، «مسیر مدل‌سازی» را شکل می‌دهد (Matos & Carreira, 1995; Borromeo Ferri, 2006, 2010; Schukajlow et al., 2023).

روش شناسی

این پژوهش با هدف تحلیل مسیرهای مدل‌سازی شناختی دانش‌آموزان بر حسب سبک‌های تفکر ریاضی، با رویکرد کیفی و به روش مطالعه موردی[۱۵] انجام شد. انتخاب این روش، با توجه به هدف پژوهش و ضرورت تحلیل عمیق فرایندهای ذهنی و شناختیِ تعداد محدودی از دانش‌آموزان (سه گروه دونفری) در بستر طبیعی حل مسئله صورت گرفت (Merriam & Tisdell, 2016; Creswell & Creswell, 2018).

1. Real situation
2. Mental representation of the situation
3. Real model
4. Mathematical model
5. Mathematical results
6. Real results
7. Understanding the task
8. Simplifying-structuring
9. Mathematizing
10. Working mathematically
11. Interpreting
12. Validating
13. Extra-mathematical knowledge (EMK)
14. Micro-modeling cycles
15. Case study

در این پژوهش در مرحله اول، ۲۳ دانش‌آموزِ پایه دهم رشته علوم انسانی در شهرستان ورامین شرکت کردند که در سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴، در یک مدرسه دولتی مشغول به تحصیل بودند. سپس بر اساس نتایج مرحله نخست، از شش نفر که سبک‌های تفکر ریاضی متفاوت داشتند، برای شرکت در مرحله دوم دعوت شد و آن‌ها نیز پذیرفتند و در قالب سه گروه دونفری با سبک‌های تفکر ریاضی متفاوت، روی چند مسئله کار کردند. انتخاب این پایه و رشته، بیشتر با توجه به سطح رشد شناختی دانش‌آموزان و فراهم‌بودن زمینهٔ بروز مشخصه‌های هر سه سبک تفکر ریاضی صورت گرفت، ضمن آنکه یکی از کلاس‌هایی که نویسندهٔ اول تدریس می‌کرد، مربوط به همین پایه و رشته بود و ازاین‌رو، دسترسی لازم برای اجرای پژوهش فراهم بود.

ابزار اصلی گردآوری داده‌ها، سه مسئله مرتبط با سبک‌های تفکر ریاضی و یک مسئله مدل‌سازی (پیوست الف) بود. این مسئله‌ها طی یک فرایند چندمرحله‌ای، طراحی و توسط دو متخصص آموزش ریاضی و یک معلم باتجربهٔ ریاضی، برای تعیین سطح دشواری، وضوح صورت مسئله‌ها و میزان درگیرکنندگی آن‌ها، اعتبارسنجی شدند. پس از اعمال اصلاحات لازم برمبنای نتایج اعتبارسنجی، مسئله‌ها در یک اجرای آزمایشی[1] در کلاس دیگری مورد استفاده قرار گرفتند تا مشکلات آن‌ها شناسایی شوند. سپس، نسخه نهایی مسئله‌ها که از نظر محتوا و ساختار بیشترین تناسب را با اهداف پژوهش داشت، در اجرای اصلی پژوهش به کار گرفته شد.

تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان به مسئله‌های مرتبط با سبک‌های تفکر ریاضی در مرحله نخست، بر اساس مشخصه‌های تعریف‌های نظریِ سبک‌های تفکر ریاضیِ Burton (1999) و Borromeo Ferri and Kaiser (2003) انجام شد. به منظور تحلیل پاسخ هر گروه از دانش‌آموزان به مسئله مدل‌سازی در مرحله دوم، از جدول مشخصه‌های گام‌های چرخه مدل‌سازی شناختی Borromeo Ferri (2010) استفاده شد. این جدول با اتکا به جدول شایستگی‌های مدل‌سازیِ Blum and Kaiser (1997, as cited in Abdollahpour, 2012) و نیز جدول کدگذاری Maaß (2006, as cited in Hankeln, 2020) تدوین شد. نویسندگان، این جدول را متناسب با اهداف پژوهش بازنگری و تکمیل کردند. در این فرایند، از نمونه‌ها و مصادیق مرتبط با تعیین مراحل و گام‌های مسیر مدل‌سازی در پژوهش‌های مختلف مدل‌سازی شناختی نیز بهره گرفته شد (Borromeo Ferri, 2006; Blum & Leiss, 2007; Borromeo Ferri, 2010; Shahbari, 2020; Ay & Ostkirchen, 2021).

جدول ۱. مشخصه‌های گام‌های چرخه مدل‌سازی شناختی Borromeo Ferri (2010)

مرحله ۱- وضعیت واقعی: فرد با موقعیت واقعی مسئله روبه‌رو می‌شود.	
گام ۱: درک مسئله	کاری که دانش‌آموز در این گام انجام می‌دهد:
	- مسئله را می‌خواند یا تکرار می‌کند.
	- جملات و واژگان استفاده شده در موقعیت مسئله را درک می‌کند.
	- داده و اطلاعات و همچنین خواسته مسئله را تشخیص می‌دهد.
	- شروع به تصور موقعیت مسئله در ذهن خود می‌کند.
	- .....
مرحله ۲- بازنمایی ذهنی موقعیت: فرد بر اساس درک کلی خود از مسئله، یک تصویر ذهنی از موقعیت می‌سازد.	
گام ۲:	کاری که دانش‌آموز انجام می‌دهد:
	- تصویر ذهنی از موقعیت را با در نظر گرفتن بیشتر اجزاء و داده‌ها، روی کاغذ ترسیم می‌کند.

1. Pilot testing

سادەسازی–ساختاردهی مسئله	- مسئله را سادەتر و خلاصەتر می‌کند.
	- برای مسئله فرض‌هایی درنظر می‌گیرد (مثلا اصطکاک را صفر فرض می‌کند).
	- به دنبال اطلاعات پنهان یا مفقود مسئله می‌گردد.
	- رابطه میان اجزای کلیدی را به کمک دادەها مشخص می‌کند.
	- دادەهای ضروری و مرتبط و همچنین دادەهای غیرمرتبط و غیرضروری در موقعیت مسئله را شناسایی می‌کند (دادەهای غیرضروری را حذف می‌کند یا نادیده می‌گیرد).
	- با توجه به نوع مسئله، از دانش غیرریاضی و تجربه‌های شخصی خود استفاده می‌کند.
	- کمیت‌های کلیدی را نام‌گذاری (غیرریاضی) می‌کند.
	- .....
مرحله ۳- مدل واقعی: عناصر کلیدی و مهم از بازنمایی ذهنی انتخاب شده و در قالبی ساختاریافته بازنمایی می‌شوند.	
گام ۳: ریاضی‌وارسازی	کاری که دانش‌آموز انجام می‌دهد:
	- متغیرها و کمیت‌ها را با نمادهای ریاضی بازنمایی می‌کند.
	- روابط بین اجزا یا کمیت‌ها را به صورت ریاضی بیان می‌کند و ممکن است محاسبات ساده ریاضی نیز انجام دهد.
	- متغیرها و کمیت‌های کلیدی را روی شکل نشان می‌دهد.
	.....
مرحله ۴- مدل ریاضی: مدل واقعی به‌صورت روابط و نمادهای ریاضی بازنویسی می‌شود. در این مرحله، احتمال بازنمایی بیرونی بیشتر است.	
گام ۴: ریاضی کار کردن (حل مسئله)	کاری که دانش‌آموز انجام می‌دهد:
	- از تعریف‌ها، قضیه‌ها و قوانین ریاضی استفاده می‌کند.
	- از راهبردهای حل مسئله مثل رسم شکل، تبدیل مسئله به مسئله‌های ساده‌تر و غیره استفاده می‌کند.
	- عملیات ریاضی و محاسبات انجام می‌دهد، معادله حل می‌کند، نمودارها را تحلیل می‌کند و ...
	- .....
مرحله ۵- نتایج ریاضی: به کمک مدل ریاضی، مسئله حل می‌شود و پاسخ‌هایی به دست می‌آیند.	
گام ۵: تفسیر کردن	کاری که دانش‌آموز انجام می‌دهد:
	- نتایج ریاضی را در زمینه‌های واقعی تفسیر می‌کند و پاسخ مسئله را در موقعیت واقعی بیان می‌کند یا می‌نویسد.
	- .....
مرحله ۶- نتایج واقعی: نتایج ریاضی به زبان موقعیت واقعی معنا یافته و بررسی می‌شوند.	
گام ۶: اعتبارسنجی	کاری که دانش‌آموز انجام می‌دهد:
	- صحت و کفایت نتیجه را در مقایسه با مرحله «مدل واقعی» و «بازنمایی ذهنی موقعیت» بررسی می‌کند. اگر نتایج واقعی با فرض‌های مسئله تناسب نداشته باشند، راه حل‌های یافته شده را بررسی کرده و در مورد برخی از بخش‌های مدل بازنگری می‌کند یا فرایند مدل‌سازی را مجدد طی می‌کند.
	- در مورد راه‌های دیگر حل مسئله یا این‌که آیا راه‌حل‌ها می‌توانند به‌طور متفاوتی توسعه یابند، تأمل می‌کند.
	- با تعمیم موقعیت واقعی مسئله به موقعیتی مشابه، مدل را اصلاح یا فرایند مدل‌سازی را مجدد طی می‌کند.
	- .....

به منظور ثبت دقیق تعاملات گروهی و فرایند حل مسئله، تمامی جلسات حل مسئله‌های مدل‌سازی فیلم‌برداری شد. نویسنده اول، که معلم کلاس نیز بود، در جریان جلسات، مشاهدات خود از فرایند مدل‌سازی دانش‌آموزان را یادداشت می‌کرد. نقش او بیشتر به مشاهده و ثبت رخدادها محدود بود و در فرایند حل مسئله مداخله نمی‌کرد. تنها در صورت وجود ابهام در متن سؤال، توضیحات لازم را ارائه می‌داد یا در صورت انحراف آشکار دانش‌آموزان از موضوع مسئله، توجه آنان را بدون جهت‌دهی به شیوهٔ حل، بار دیگر به متن مسئله معطوف می‌کرد.

جهت اطمینان از اعتبار[1] تحلیل‌ها، از روش سه‌سویه‌سازی داده‌ها[2] استفاده شد و داده‌ها بر اساس منابع مختلف شامل پاسخ‌های کتبی دانش‌آموزان، فیلم‌های ضبط‌شده جلسات مدل‌سازی و یادداشت‌های بازتابی و میدانی، جمع‌آوری و تحلیل شدند تا تفسیرها تنها بر یک منبع داده متکی نباشد. همچنین، متن پیاده‌سازی شده گفت‌وگوهای دانش‌آموزان و پاسخ‌های کتبی آنان، در اختیار یک متخصص آموزش ریاضی قرار گرفت تا به‌طور مستقل، گام‌ها و مراحل مسیر مدل‌سازی هر گروه را بر اساس جدول مشخصه‌های گام‌های چرخه مدل‌سازی، شناسایی و کدگذاری کند. میزان توافق میان دو کدگذار بر اساس ضریب کاپای کوهن[3] (۰٫۸۲) محاسبه شد که نشان‌دهنده پایایی[4] و ثبات بالای فرایند تحلیل داده‌ها است.

یافته‌های پژوهش

در این بخش به ارائه نتایج تحلیل داده‌های گردآوری‌شده از پژوهش پرداخته شده است. پس از شناسایی سبک‌های تفکر ریاضی دانش‌آموزان در مرحله اول، شش دانش‌آموز انتخاب شدند و بر اساس سبک‌های تفکرِ بصری، تحلیلی و مفهومی، در سه گروه قرارگرفتند. سپس، پاسخ‌های کتبی گروه‌ها به سه مسئله مدل‌سازی و تعاملات گروهی‌شان، بررسی و تحلیل شدند. هدف اصلی این تحلیل، شناسایی مسیرهای مدل‌سازی گروه‌ها بر مبنای چرخهٔ مدل‌سازی شناختیِ Borromeo Ferri (2010) و بررسی این مسیرها برحسب سبک‌های تفکر ریاضی دانش‌آموزان بود.

در این تحلیل، ابتدا محتوای تمام گفت‌وگوها و پاسخ‌های کتبیِ گروه‌ها، به متن نوشتاری تبدیل شد. سپس گام‌ها و مراحل مسیر مدل‌سازی هر گروه بر اساس جدول مشخصه‌های گام‌های چرخه مدل‌سازی شناختی Borromeo Ferri (2010)، تعیین شدند. بدین‌ترتیب، بازنمایی تصویری مسیر مدل‌سازی هر گروه و تحلیل مسیرهای مدل‌سازی شناختی آنان در فرایند حل مسئله مشخص شد. در این بخش، تحلیل فرایند مدل‌سازیِ هر گروه به همراه بازنمایی تصویری مسیر مدل‌سازی شناختی آن‌ها ارائه می‌شود. برای نمونه، بخشی از جدول شناسایی و تعیین گام‌ها و مراحلِ مسیر مدل‌سازیِ گروه تحلیلی، در پیوست ب آمده است.

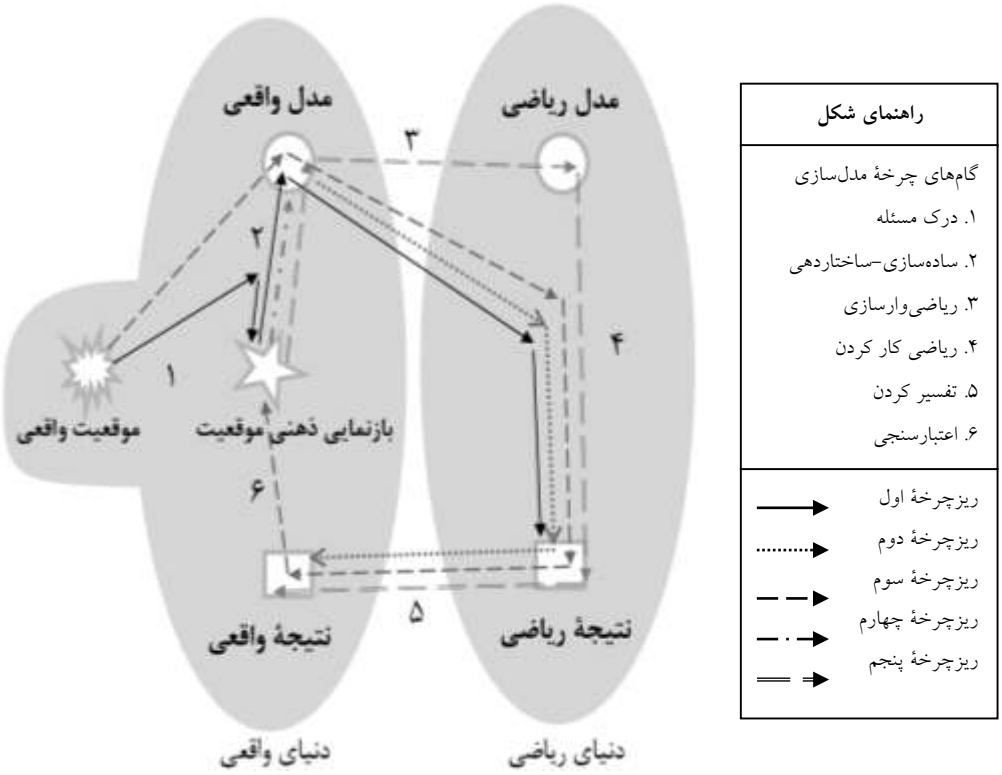
مسیر مدل‌سازی گروه بصری

مسیر مدل‌سازی گروه بصری شامل پنج ریزچرخه بود (شکل ۲). تحلیل فرایند حل مسئله مدل‌سازی این گروه نشان داد که دانش‌آموزانی که دارای سبک تفکر ریاضی بصری بودند، پس از مرحله موقعیت واقعی، وارد مرحله بازنمایی ذهنی موقعیت و پس از آن، وارد مرحله مدل واقعی شدند. آنان در این مراحل، بیشتر از بازنمایی‌های تصویری[5] و تجسمی و تصورات ذهنی برای درک مسئله استفاده کردند و به خوبی داده‌های کلیدی را شناسایی کردند، اما در انتقال از مرحله مدل واقعی به مدل

1. Trustworthiness
2. Data Triangulation
3. Cohen’s Kappa
4. Dependability
5. Visual Representation

ریاضی، با چالش جدی مواجه شدند. درنتیجه، ناچار به تولید شکل‌های متعدد و بازنمایی‌های متنوع از موقعیت واقعی شدند تا بتوانند روابط میان اجزای مسئله را به زبان ریاضی بازنمایی کنند و گام ریاضی‌وارسازی را طی کنند.

علاوه بر این، تحلیل مسیر مدل‌سازی گروه بصری نشان داد که این دانش‌آموزان، تمایل چندانی به انجام محاسبات جبری و طی کردن گام ریاضی کار کردن نداشتند و بخش عمده‌ای از زمان حل مسئله را در دنیای واقعی و بازنمایی‌های تصویری صرف کردند. در گام اعتبارسنجی نیز این گروه، تنها یک‌بار و به‌صورت شهودی عمل کرد، بدین معنا که درستی پاسخ خود را بدون ارائه استدلالی مبتنی بر داده‌ها و تنها بر پایه تصویر ذهنی از موقعیت، ارزیابی نمودند. همچنین، این گروه در گام‌های ساده‌سازی–ساختاردهی و مدل واقعی، به‌طور مؤثری از دانش غیرریاضی برای فهم شرایط مسئله و ساده‌سازی موقعیت مانند تعیین ارتفاع پنجره، بهره بردند.



شکل ۲. بازنمایی تصویری مسیر مدل‌سازی گروه بصری

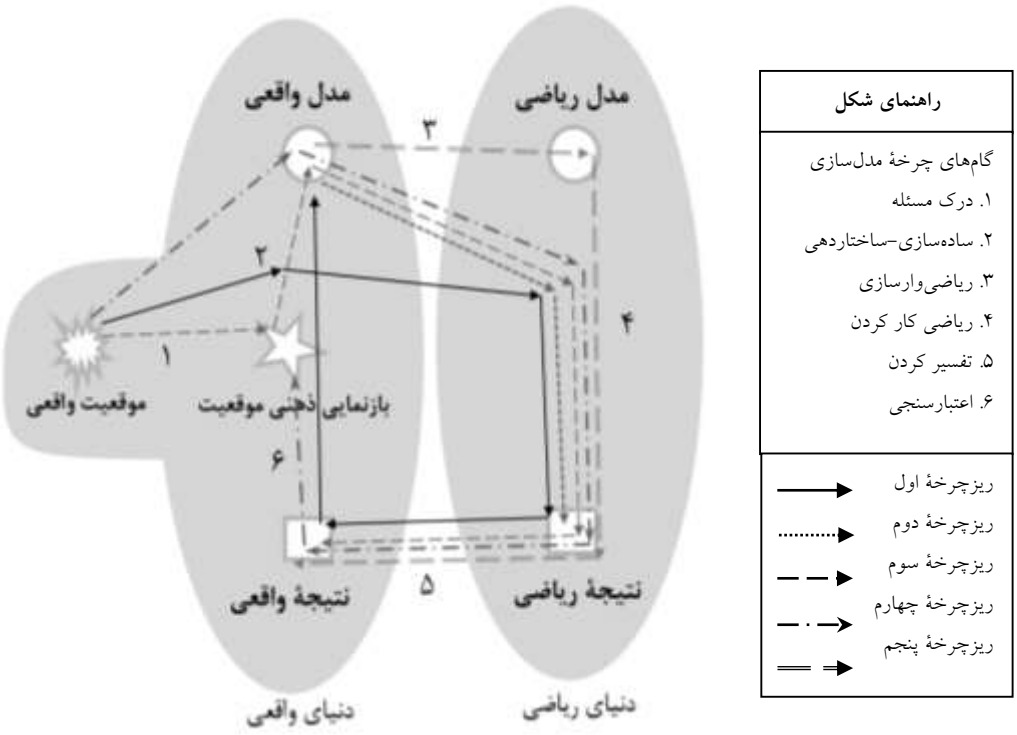
مسیر مدل‌سازی گروه تحلیلی

مسیر مدل‌سازی گروه تحلیلی، شامل پنج ریزچرخه بود (شکل ۳). تحلیل مسیر مدل‌سازی این گروه نشان داد که دانش‌آموزانی که دارای سبک تفکر ریاضی تحلیلی بودند، پس از گام ساده‌سازی–ساختاردهی و دریافت داده‌های تکمیلی، بدون توقف در مرحله بازنمایی ذهنی موقعیت، مستقیماً وارد گام ریاضی کار کردن شدند. آنان تمایل داشتند که سریعاً از مرحله موقعیت واقعی وارد دنیای ریاضی شوند و درنتیجه، طی کردن گام ریاضی کار کردن در همه ریزچرخه‌های مسیر این گروه، مشاهده شد.

با این حال، این شتاب در ورود به دنیای ریاضی، منجر به چالش در تشخیص و بازنمایی داده‌های کلیدی شد که پیامد آن، رفت‌وبرگشت‌های متعدد بین دنیای واقعی و دنیای ریاضی بود. به‌این دلیل، دانش‌آموزان گروه تحلیلی ناچار شدند بارها به مراحل بازنمایی ذهنی موقعیت و مدل واقعی بازگردند تا با بازنمایی‌های تصویری و رسم شکل، درک خود را از مسئله،

دقیق‌تر کنند. از سوی دیگر، دانش‌آموزان پس از دستیابی به مرحله مدل ریاضی، به دلیل تسلط بر محاسبات جبری، به سهولت به مرحله نتیجه ریاضی و نتیجه واقعی دست یافتند.

در گام اعتبارسنجی، این گروه دو رویکرد متفاوت اتخاذ کرد. در یک مورد، دانش‌آموزان پاسخ به‌دست‌آمده را به‌صورت شهودی و بدون ارائه استدلال منطقی ارزیابی کردند. ولی در اعتبارسنجی دوم، آنان اعتبار پاسخ را با اتکا به مفروضات و شرایط مسئله در مرحله مدل واقعی مورد بررسی قرار دادند. دانش‌آموزان با سبک تفکر ریاضی تحلیلی در مراحل مختلف حل مسئله، از دانش غیرریاضی نیز بهره بردند.

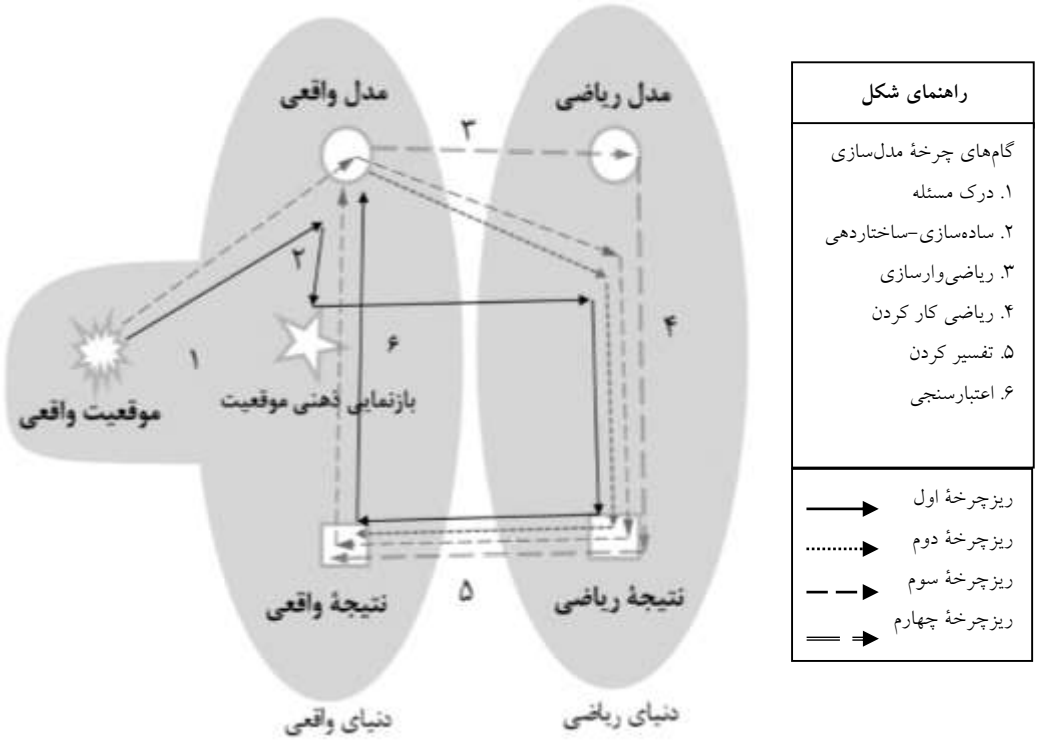


شکل ۳. بازنمایی تصویری مسیر مدل‌سازی گروه تحلیلی

مسیر مدل‌سازی گروه مفهومی

مسیر مدل‌سازی دانش‌آموزان گروه مفهومی شامل چهار ریزچرخه بود (شکل ۴) در مسیر مدل‌سازی این گروه، دانش‌آموزان پس از مرحله موقعیت واقعی، ابتدا وارد مرحله بازنمایی ذهنی موقعیت شدند تا روابط میان داده‌ها را درک کنند و سپس وارد دنیای ریاضی و طی کردن گام ریاضی کار کردن شدند. دانش‌اموزان این گروه در برخی از ریزچرخه‌ها، برای شناسایی و مرور داده‌های کلیدی و درک مسئله، به مرحله مدل واقعی بازمی‌گشتند.

با وجود این چالش، دانش‌آموزان در بازنمایی روابط بین داده‌ها به زبان ریاضی، عملکرد مطلوبی از خود نشان دادند. دانش‌آموزان گروه مفهومی با رسم تنها یک شکل ساده و دقیق، گام ریاضی‌وارسازی را به سهولت طی کردند و به مرحله مدل ریاضی دست یافتند. این گروه، دوبار اعتبارسنجی را انجام داد و در هر دوبار، پاسخ به دست آمده را بر اساس مفروضات و اطلاعات مسئله و استدلال منطقی، اعتبارسنجی کرد.



شکل ۴. بازنمایی تصویری مسیر مدل‌سازی گروه مفهومی

بحث و نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر با هدف تحلیل مسیرهای مدل‌سازی شناختی دانش‌آموزان پایه دهم علوم انسانی و بر اساس سبک‌های تفکر ریاضی انجام شد. یافته‌های مرحله نخست نشان داد که در بین دانش‌آموزان، سه سبک تفکر ریاضیِ بصری، تحلیلی و مفهومی قابل شناسایی است. این یافته، در مقایسه با پژوهش‌های Borromeo Ferri (2010) و Shahbari (2020)، از آن جهت حائز اهمیت است که در آن پژوهش‌ها، سبک تفکر ریاضی مفهومی شناسایی نشد، در حالی که در پژوهش حاضر، این سبک نیز شناسایی و در تحلیل مسیرهای مدل‌سازی شناختی مورد استفاده قرارگرفت.

تحلیل مسیرهای مدل‌سازی شناختی دانش‌آموزان نیز نشان داد که وجود ریزچرخه‌ها در فرایند حل مسئله، بیانگر ماهیت تکرارشونده و چرخه‌ایِ فرایند مدل‌سازی بود. این یافته، با نتایج پژوهش‌های پیشین هم‌سو است (Matos & Carreira, 1995; Borromeo Ferri, 2010; Shahbari, 2020).

یافته‌های پژوهش همچنین نشان داد که سبک‌های تفکر ریاضی دانش‌آموزان در شکل‌گیری مسیر مدل‌سازی شناختی گروه‌ها نقش قابل‌توجهی داشتند. این نقش در تعداد ریزچرخه‌های طی‌شده، ترتیب اجرای مراحل چرخه و میزان و تنوع بازنمایی‌های به‌کاررفته، آشکار بود. به‌عنوان مثال، گروه‌های دارای سبک تفکر ریاضی بصری و تحلیلی، هر یک پنج ریزچرخه را طی کردند، در حالی که گروه مفهومی با چهار ریزچرخه، به پاسخ نهایی رسید.

یافته‌ها حاکی از آن بود که دانش‌آموزانِ گروه بصری، همان طور که از سبک تفکر ریاضی آن‌ها انتظار می‌رفت، زمان بیشتری را در مراحل بازنمایی ذهنی موقعیت و مدل واقعی، به تجسم و تصویرسازیِ داده‌های مسئله اختصاص دادند. درحالی‌که دانش‌آموزان گروه تحلیلی، ترجیح دادند از فرمول‌ها و روابط جبری برای حل مسئله استفاده کنند و به همین دلیل،

به سرعت وارد گام ریاضی کار کردن شدند. از سوی دیگر، دانش‌آموزان گروه مفهومی بر شناسایی داده‌های کلیدی در مرحله مدل واقعی و سپس بازنمایی ریاضی آن‌ها تمرکز داشتند. افزون براین، آنان توانستند با اعتبارسنجی دقیق و منطقیِ پاسخ‌ها، سریع‌تر از دو گروه دیگر به پاسخ نهایی دست یابند. یافته‌های گروه‌های بصری و تحلیلی با نتایج پژوهش‌های Borromeo Ferri (2010) و Shahbari (2020) همخوانی دارند.

نتایج پژوهش همچنین نشان داد که میزان و نوع بازنمایی‌های به‌کاررفته در مسیر مدل‌سازی، از بازنمایی‌های ذهنی، تجسمی و فیزیکی تا بازنمایی‌های تصویری و جبری، در میان گروه‌ها متفاوت بود. مثلاً گروه بصری بیشترین تنوع را در استفاده از این بازنمایی‌ها، به‌ویژه در مراحل آغازین حل مسئله نشان داد. درصورتی که گروه تحلیلی، از دامنه محدودتری از بازنمایی‌ها استفاده کرد و آن‌ها را بیشتر در خدمت انجام محاسبات و استدلال‌های ریاضی به‌کارگرفت. گروه مفهومی نیز از کمترین تعداد بازنمایی استفاده کرد. این گروه با بهره‌گیری از تنها یک بازنمایی تصویریِ هدفمند، داده‌های کلیدی را شناسایی و ارتباط بین آن‌ها را برقرار کرد.

مقایسه مسیرهای مدل‌سازی گروه‌ها نشان داد که دانش‌آموزان هر گروه، متناسب با سبک تفکر ریاضی ترجیحی خود، در برخی از مراحل چرخه بهتر پیش رفتند و در برخی دیگر از مراحل، با چالش‌هایی مواجه شدند. به عنوان مثال، گروه بصری طی حل مسئله، در انتقال از مدل واقعی به مدل ریاضی با چالش روبرو شد. گروه تحلیلی نیز به دلیل شتاب در ورود به دنیای ریاضی، رفت‌وبرگشت‌های متعددی میان دنیای واقعی و دنیای ریاضی داشت. اما گروه مفهومی با این‌که سریع‌تر از دو گروه دیگر به پاسخ مسئله دست یافت، در برخی موارد به منظور بازبینی راه‌حل خود، به مراحل ابتدایی چرخه بازمی‌گشت. با این‌حال، این تفاوت‌ها، بیانگر ترجیحات متفاوت دانش‌آموزان در چگونگی درک و بازنمایی اطلاعات مسئله است و برتری یک سبک تفکر ریاضی را بر سبک دیگر، نشان نمی‌دهد.

یافته‌های پژوهش همچنین نشان دادند که تمرکز بر داده‌های کلیدی، حذف اطلاعات غیرضروری، بهره‌گیری از بازنمایی‌های متناسب با هر مرحله و اعتبارسنجی مستمر، می‌تواند دقت و کارآمدی فرایند مدل‌سازی را افزایش دهد.

نتیجه‌گیری مبتنی بر یافته‌های این پژوهش بیانگر آن است که دانش‌آموزان با سبک‌های مختلف تفکر ریاضی، مسیرهای مدل‌سازی شناختی متفاوتی را طی می‌کنند و لازم است این تفاوت‌ها به‌عنوان یکی از ملاحظات مهم در طراحی و توسعه برنامه درسی ریاضی مبتنی بر مدل‌سازی، به‌ویژه در انتخاب و سازمان‌دهی فعالیت‌های یادگیری، مورد توجه قرار گیرد.

ملاحظات اخلاقی

این پژوهش با رعایت اصول اخلاق پژوهش انجام شد. پیش از آغاز مطالعه، هدف و روند پژوهش برای دانش‌آموزان توضیح داده شد و موافقت آنان و رضایت والدینشان برای شرکت در پژوهش اخذ شد. مشارکت داوطلبانه بود و دانش‌آموزان در هر مرحله حق انصراف از پژوهش را داشتند. محرمانگی اطلاعات و هویت مشارکت‌کنندگان حفظ شد و در گزارش یافته‌ها از نام‌های مستعار یا کد استفاده شد. داده‌ها و اسناد پژوهش به‌صورت امن نگهداری شدند و صرفاً برای اهداف پژوهشی مورد استفاده قرار گرفتند.

مشارکت نویسندگان

فاطمه دلاویز: مشارکت در طراحی پژوهش، اجرای پژوهش، گردآوری و تحلیل داده‌ها، تفسیر یافته‌ها، نگارش پیش‌نویس اولیه و مشارکت در بازنگری و اصلاح متن مقاله.

مهدخت نقیبی بیدختی: مفهوم‌سازی و طراحی پژوهش، راهبری و نظارت علمی، مشارکت در تحلیل داده‌ها و تفسیر یافته‌ها، مشارکت در نگارش پیش‌نویس اولیه و بازبینی علمی، بازنویسی و تکمیل متن مقاله.

رضا حیدری قزلچه: مشارکت در طراحی و اصلاح ساختار پژوهش و ارائه پیشنهادهای علمی برای بازبینی و اصلاح مقاله.

همه نویسندگان نسخه نهایی مقاله را مطالعه و تأیید کرده‌اند و مسئولیت مشارکت خود در این اثر را می‌پذیرند.

تعارض منافع

نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ‌گونه تعارض منافع مالی یا غیرمالی مرتبط با این مقاله ندارند.

بیانیه استفاده از هوش مصنوعی

در آماده‌سازی متن مقاله، از ابزارهای هوش مصنوعی صرفاً برای ویرایش زبانی و بهبود وضوح و خوانایی متن استفاده شد. نویسندگان محتوای حاصل از این فرایند را بازبینی و اصلاح کرده‌اند و مسئولیت کامل دقت و صحت محتوای نهایی مقاله را بر عهده دارند.

References:

Abdollahpour, K. (2012). A study of modeling competency levels among first- and second-year high school students (Master's thesis). Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran. [In Persian]

Abdollahpour, K., & Rafiepour, A. (2017). Phenomenology of the modeling cycle of ninth-grade students in solving an authentic problem. Mathematics Education Journal, 11(2), 149-160. [In Persian]

Akçakın, V., & Kaya, G. (2020). Determining High School Students' Mathematical Thinking Styles: Latent Class Analysis. Education and Science, 45(201), 39-54. https://doi.org/10.15390/EB.2020.8070

Asadi, M., & Heidari Ghezeljeh, R. (2024). Using Open-Ended Problems to Enhance Students' Mathematical Modeling Skills: Where Should We Build the Hospital? Journal of Theory and Practice in Curriculum, 12(23), 215-242. [In Persian]

Ay, I., & Ostkirchen, F. (2021). Influence of social background on mathematical modelling — The DiMo+ project. In F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser, & K. L. Wong (Eds.), Mathematical Modelling Education in East and West (pp. 93–102). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_8

Blum, W., & Leiss, D. (2005). Filling up—the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In CERME 4–proceedings of the fourth congress of the European Society for Research in mathematics education (pp. 1623–1633). Fundemi IQS–Universität Ramon Llull

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 38(2), 86–95 . https://doi.org/10.1007/BF02655883

Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. Journal für Mathematik-Didaktik, 31(1), 99 –118. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8

Borromeo Ferri, R. (2011). Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens: Kognitive Analysen zu Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH.

Borromeo Ferri, R. (2015a). Zur Rolle kognitiver Aspekte in der Modellierungsdiskussion. In G. Kaiser & H.-W. Henn (Eds.), Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht: Festschrift zum 70. Geburtstag von Werner Blum (pp. 63-76). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-09532-1_5

Borromeo Ferri, R. (2015b). Mathematical thinking styles in school and across cultures. In S. J. Cho (Ed.), Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education (pp. 153-173). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_9

Borromeo Ferri, R. (2018). Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Borromeo Ferri, R., & Kaiser, G. (2003). First results of a study of different mathematical thinking styles of schoolchildren. In L. Burton (Ed.), Which way social justice in mathematics education? (pp. 209-239). Praeger.

Bulut, N., & Borromeo Ferri, R. (2025). Bridging mathematical modelling and education for sustainable development in pre-service primary teacher education. Education Sciences, 15(2), 248.

Burton, L. (1999). Mathematics and their epistemologies—and the learning of mathematics. In I. Schwank (Ed.), Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 87-102). Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Cai, J., Cirillo, M., Pelesko, J. A., Borromeo Ferri, R., Borba, M., Geiger, V., Stillman, G., English, L. D., Wake, G., Kaiser, G., & Kwon, O. (2014). Mathematical modeling in school education: Mathematical, cognitive, curricular, instructional, and teacher education perspectives. In Proceedings of the Joint Meeting of PME, (Vol. 38, pp. 145-172)

Creswell, J. W., & Creswell, J. D. (2018). Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approach (5th ed.; A. Kiamanesh & M. Danaye Toos, Trans.). Tehran: Jahad Daneshgahi.

Galbraith, P. L., & Stillman, G. A. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. ZDM–Mathematics Education, 38(2), 143–162. https://doi.org/10.1007/BF02655886

Gholami, M., Asghary, N., & Golshani, L. (2025). The impact of the multiple-solution approach in solving open-response mathematical modeling problems on students' performance and interest. Theory and Practice in Curriculum, 13(26), 255-294. [In Persian]

Hankeln, C. (2020). Mathematical modeling in Germany and France :A comparison of students' modeling processes. Educational Studies in Mathematics, 103(2), 209-229. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09931-5

Krawitz, J., Schukajlow, S., Yang, X., & Geiger, V. (2025). A systematic review of international perspectives on mathematical modelling: Modelling goals and task characteristics. ZDM–Mathematics Education, 57(2), 193-212. https://doi.org/10.1007/s11858-025-01683-2

Matos, J., & Carreira, S. (1995). Cognitive processes and representations involved in applied problem solving. In Advances and perspectives in the teaching of mathematical modelling and applications, (pp. 71–80).

Merriam, S. B., & Tisdell, E. J. (2016). Qualitative research: A guide to design and implementation (4th ed.; A. Kiamanesh & M. Danaye Toos, Trans.). Tehran: SAMT.

Niss, M., & Blum, W. (2020). The learning and teaching of mathematical modelling. Routledge.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. W. Blum, H.-W. Henn, & P. L. Galbraith (Eds.), Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study (Vol. 10, pp. 3-32). Springer.

Porter, A., McMaken, J., Hwang, J., & Yang, R. (2011). Common Core Standards: The new U.S. intended curriculum. Educational Researcher, 40(3), 103-116. https://doi.org/10.3102/0013189X11405038

Rafiepour, A. (2015). Potential capacities and obstacles of using the "application and modeling approach" in tertiary mathematics education. Journal of Higher Education Curriculum and Studies, 6(12), 173-188. [In Persian]

Salamat, Z. (2021). The effect of modeling-based instruction on sixth-grade male students' performance in solving fraction problems in mathematics (Master's thesis). Shahid Beheshti Teacher Training Center, Tehran, Iran. [In Persian]

Schukajlow, S., Krawitz, J., Kanefke, J., Blum, W., & Rakoczy, K. (2023). Open modelling problems: Cognitive barriers and instructional prompts. Educational Studies in Mathematics, 114(3), 417-438. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10265-6

Shahbari, J. A. (2020). Mathematical thinking styles and the features of modeling process. Scientia in education, 11(1), 59-68. https://doi.org/10.14712/25337575.2020.5

Shahmohammadi, M., & Reyhani, E. (2019). The relationship between mathematical modeling and levels of mathematical thinking in dealing with an enclosure problem. In Proceedings of the Third International Congress of Science and Engineering. [In Persian]

Siller, H. S., Günster, S. M., & Geiger, V. (2024). Mathematics as a central focus in STEM–Theoretical and practical insights from a special study program within pre-service (prospective) teacher education. In Y. Li, Z. Zeng, & N. Song (Eds.), Disciplinary and Interdisciplinary Education in STEM: Changes and Innovations (pp. 317-343). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-52924-5_15

Stillman, G. A. (2019). State of the art on modelling in mathematics education—Lines of inquiry. In G. A. Stillman & J. P. Brown (Eds.), Lines of inquiry in mathematical modelling research in education (pp. 1–20). Springer .https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_1

Supreme Council of Education. (2012). The National Curriculum of the Islamic Republic of Iran. Secretariat of the Supreme Council of Education.

Torabi, P., Taghi Dastjerdi, S., & Ashtari, A. H. (2026). The role of mathematical modeling in improving high school students' comprehension of mathematical concepts. Journal of Curriculum Studies, 21(80), 201–226.

Verschaffel, L. (2002). Taking the modeling perspective seriously at the elementary school level: Promises and pitfalls. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), Proceedings of the 26th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 64–80). University of East Anglia.

Vorhölter, K., Greefrath, G., Borromeo Ferri, R., Leiß, D., & Schukajlow, S. (2019). Mathematical modelling. In H. N. Jahnke & L. Hefendehl-Hebeker (Eds.), Traditions in German-Speaking Mathematics Education Research (pp. 91-114). Springer .https://doi.org/10.1007/978-3-030-11069-7_4

پیوست الف: مسئله‌ها

مسئله‌های مرتبط با سبک‌های تفکر ریاضی

۱. پنج نفر در یک مهمانی حضور دارند. هر مهمان می‌خواهد دقیقاً یک‌بار با هر فرد دیگر در مهمانی دست بدهد. در این مهمانی مجموعاً افراد چندبار با هم دست می‌دهند؟ اگر تعداد مهمان‌ها به ۲۰ نفر افزایش یابد، چطور می‌توان تعداد دست‌دادن‌ها را پیدا کرد؟

۲. در یک سالن ورزشی، مسئول خرید هرروز تعدادی توپ پینگ‌پنگ برای تمرین بازیکنان تهیه می‌کند. هر روز، ۳ توپ بیشتر از روز قبل به سبد توپ‌ها اضافه می‌شود. بعد از چند روز، مربی متوجه می‌شود که مجموع توپ‌های روزهای سوم و چهارم، برابر با ۲۱ توپ بوده است. با این اطلاعات، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید: الف) در هرکدام از روزهای سوم و چهارم، چند توپ پینگ‌پنگ در سالن موجود بوده است؟

ب) در روز اول و دوم، تعداد توپ‌ها چند تا بوده است؟

ج) اگر این روند خرید توپ ادامه پیدا کند، در روز ۹۹اُم چند توپ در سبد خواهد بود؟ روز ۹۹۹اُم چطور؟

۳. یک مربع به ضلع a داریم. مانند شکل زیر، یک مثلث متساوی‌الساقین داخل مربع طوری رسم شده است که قاعده مثلث روی یکی از اضلاع مربع و رأس مثلث در وسط ضلع مقابل مربع قرار گرفته است.

الف) مساحت مثلث را با مساحت مربع مقایسه کنید (نسبت مساحت مثلث به مربع چند است؟)

ب) اگر ضلع مربع را دو برابر کنیم، مساحت مثلث چند برابر خواهد شد؟ نسبت مساحت مثلث به مربع در حالت جدید، برابر چند است؟



مسئله مدل‌سازی آتش‌سوزی در مدرسه

فرض کنید زنگ هشدار آتش‌سوزی در مدرسه شما به صدا درآمده است و دانش‌آموزان باید به سرعت مدرسه را تخلیه کنند. ماشین آتش‌نشانی وارد حیاط مدرسه شده و آتش‌نشان‌ها در حال بررسی سریع‌ترین روش برای خاموش کردن آتش هستند. فاصله مکان آتش‌سوزی تا زمین، تعیین می‌کند آتش‌نشان‌ها باید مستقیماً (بدون استفاده از نردبان) یا با کمک نردبان، آتش را خاموش کنند. از آن‌جایی که باز کردن نردبان کمی زمان‌بر است و خاموش کردن آتش به صورت مستقیم سریع‌تر انجام می‌شود، آتش‌نشان‌ها تا جایی که ارتفاع مکان آتش‌سوزی اجازه دهد، ترجیح می‌دهند از روش خاموش کردن مستقیم استفاده کنند. همچنین، برای رعایت نکات ایمنی و محافظت از خود در برابر شعله‌های آتش و آوار ساختمان، ماشین آتش‌نشانی و آتش‌نشان‌ها از دیوار ساختمان، باید حداقل فاصله‌ای داشته باشند.

ماشین آتش‌نشانی موجود، دارای یک نردبان کشویی و شلنگ به شرح زیر است:

- نردبان کشویی می‌تواند در دو اندازه مختلف باز شود که طول آن در کوتاه‌ترین حالت ۵ متر و در بلندترین حالت ۱۲ متر است. این نردبان دارای یک کابین برای حمل آتش‌نشان در بالای آن است.
- بُرد آب شلنگ: آب از انتهای شلنگ می‌تواند به صورت مستقیم (افقی) حداکثر تا ۶ متر و در حالت زاویه‌دار (کمتر از ۹۰ درجه) تا ۵ متر پرتاب شود.




سوال: اگر آتش‌سوزی در یک کلاس طبقه دوم اتفاق افتاده باشد:

الف) برای خاموش کردن آتش از طریق پنجره، نیاز به استفاده از نردبان هست یا خیر؟ توضیح دهید.

ب) ماشین آتش‌نشانی یا آتش‌نشان، حداکثر در چه فاصله‌ای از مدرسه می‌تواند قرار بگیرد تا آتش را خاموش کند؟

اطلاعات اضافی:

- مدرسه دارای چهار طبقه (طبقه اول همکف روی زمین) است و ارتفاع هر طبقه ۳ متر است.
- فاصله پنجره از کف هر طبقه و ارتفاع هر پنجره، برابر ۱ متر است.
- ارتفاع ماشین آتش‌نشانی از زمین تا جایگاه نردبان، برابر ۲ متر است.

پیوست ب: بخشی از تجزیه و تحلیل داده‌های گروه تحلیلی

شماره	توصیفات شفاهی و رفتاری گروه تحلیلی (هستی و نازی)	مرحله	گام
۱	مسئله مدل‌سازی به دانش‌آموزان داده می‌شود.	موقعیت واقعی	–
۲	(دانش‌آموزان صورت مسئله را خواندند و درباره خواسته مسئله بحث کردند.) نازی: «مسئله از ما می‌خواهد چه چیزی را به دست آوریم؟» هستی صورت سؤال قسمت «الف» و اطلاعات مسئله را درباره طول نردبان، برای نازی می‌خواند: «سؤال گفته برای خاموش کردن آتش از طریق پنجره، آیا نیاز به نردبان هست یا خیر؟ همچنین آتش‌سوزی در طبقه دوم است. در این‌جا یک سری اطلاعات هم به ما داده. باید یک راه‌حل بنویسیم.»	″	درک مسئله (تشخیص داده و خواسته مسئله)
۳	هستی: « می‌توانیم یک عدد فرضی برای ارتفاع طبقه دوم در نظر بگیریم؟ یعنی چقدر تا زمین فاصله دارد؟» نازی: «دقیقاً داشتم به همین فکر می‌کردم. ارتفاع طبقه چقدرهست؟» (دانش‌آموزان تشخیص می‌دهند که یک داده کلیدی در مسئله بیان نشده است)	بازنمایی ذهنی موقعیت	ساده‌سازی–ساختاردهی (به دنبال اطلاعات پنهان)
	توضیح: نویسنده اول داده‌های مورد نیاز (از جمله ارتفاع هر طبقه، ارتفاع ماشین آتش‌نشانی و فاصله پنجره از کف هر طبقه) را به‌صورت مکتوب در اختیار دانش‌آموزان قرار داد.	–	–
۴	دانش‌آموزان پس از مطالعه هر داده، درباره آن گفت‌وگو کردند تا کاملا اطلاعات را درک کنند.	موقعیت واقعی	درک مسئله (خواندن اطلاعات مسئله)
۵	دانش‌آموزان یک داده کلیدی دیگر هم یاداوری می‌کنند: «آها، این را هم در نظر بگیر که ارتفاع ماشین آتش‌نشانی، ۲ متر از ارتفاع ساختمان را کم می‌کند، یعنی نردبان را بالاتر می‌برد»	بازنمایی ذهنی موقعیت	ساده‌سازی–ساختاردهی (داده‌های کلیدی و دانش غیرریاضی)
۶	دانش‌آموزان ارتفاع پنجره طبقه دوم را حساب کردند: «طبقه اول ۳ متر، طبقه دوم هم ۳ متر، مجموعاً ۶ متر می‌شود و یک متر دیگر هم فاصله پنجره از کف طبقه دوم هست. اگر جمع کنیم، ۷ متر می‌شود و ارتفاع ماشین (۲ متر) از ارتفاع ساختمان کم می‌شود پس ارتفاع مورد نظر ما، ۵ متر می‌شود» هستی ادامه می‌دهد: «اگر از نردبان استفاده نکنیم، حداکثر برد آب شلنگ، ۶ متر است که از ۷ متر کوتاه‌تر است»	مدل ریاضی ضمنی	ریاضی کار کردن (محاسبات ریاضی، دانش غیرریاضی)
۷	دانش‌آموزان پاسخ ریاضی را بیان می‌کنند: «نردبان کشویی ۵ متر است و هم‌اندازه ارتفاع پنجره است»	نتیجه ریاضی	تفسیر کردن
۸	دانش‌آموزان جواب سؤال را بیان می‌کنند: «از نردبان کشویی هم می‌توانیم استفاده کنیم. فقط کمی زمان‌بر هست، ولی به صرفه‌تر است»	نتیجه واقعی	-
۹	دانش‌آموزان بلافاصله اعتبارسنجی می‌کنند و مفروضات مسئله را در بررسی درستی پاسخ خود نظر می‌گیرند.نازی:«ولی سوال گفته که باز کردن نردبان، زمان‌بر است.» هستی: «آره، سوال گفته بهتر است از روش خاموش کردن مستقیم با شلنگ استفاده کنیم. پس باید اولویت‌بندی کنیم.»	″	اعتبارسنجی (بررسی مفروضات و شرایط مسئله)