



The Role of Mathematical Modeling in Improving High School Students' Comprehension of Mathematical Concepts

Parvin. Torabi*¹, Sharareh. Taghi Dastjerdi², Amir Hossein. Ashtari³

1. **Corresponding author** Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Jundi-Shapur University of Technology, Dezful, Iran. p_torabi@jsu.ac.ir,  <http://orcid.org/0000-0002-7165-4226>
2. Master's degree in mathematics, Isfahan Mathematics House, Iran. sh.dastjerdi@gmail.com
3. Master's degree in Statistics, Isfahan Mathematics House, Iran. amirashtari1373@gmail.com

Article Info

ABSTRACT

Article type:
Research Article

Keywords:

Mathematical modeling, spreadsheet (Excel), recursive sequences, rate of change, large numbers.

This study aims to examine the role of mathematical modeling supported by educational technology, with the Excel spreadsheet as an accessible and user-friendly example, in enhancing the learning of three key high school mathematical concepts: recursive sequences, rate of change, and working with large numbers. In this research, a modeling course was designed and implemented with content closely aligned to essential school mathematics concepts, enabling students to experience these ideas in authentic contexts. A total of 33 secondary school students participated in a workshop in which they modeled rabbit population growth using Excel. The course was designed to familiarize students with the modeling cycle and to provide opportunities for them to engage with recursive sequences, rate of change, and large numbers in authentic contexts. Data were collected through researcher-designed pre-tests and post-tests and analyzed using the non-parametric Wilcoxon signed-rank test. The results revealed a significant improvement in students' scores across all three variables. These findings suggest that, when integrated with educational technology, mathematical modeling can foster deeper conceptual understanding and increase motivation in mathematics learning.

Received: 06 December 2025

Reviewed: 28 January 2026

Accepted: 18 April 2026

Published: 08 June 2026

Citation (APA): Torabi, P. , Tghi Dastjerdi, SH. & Ashtari ,A. H. (2026). The Role of Mathematical Modeling in Improving High School Students' Comprehension of Mathematical Concepts . *Iranian Journal of curriculum studies*. 20 (79),  <https://doi.org/10.22034/jcs.2026.492270.2380>



© The Author(s).

Publisher: Iranian Curriculum Studies Association

Extended Abstract

Introduction

Mathematical modeling provides an authentic context in which students can explore mathematical concepts through real-world phenomena. When combined with digital technologies, modeling activities can promote conceptual understanding by allowing students to investigate patterns, visualize mathematical relationships, and perform calculations that would otherwise be difficult. Among widely available educational technologies, Microsoft Excel offers a simple yet powerful environment for constructing mathematical models, generating recursive sequences, and analyzing numerical data.

This study investigates the effectiveness of an Excel-based mathematical modeling activity in improving secondary school students' understanding of three fundamental mathematical concepts: recursive patterns and sequences, rate of change, and reasoning with large numbers. The instructional activity was designed around a population-growth modeling problem that required students to formulate recursive relationships, identify emerging patterns, and interpret exponential growth using spreadsheet calculations and visual representations.

Methodology

The study employed a one-group pretest–posttest design involving 33 secondary school students from grades 9 to 11 with different educational backgrounds. The instructional intervention was implemented during two mathematics enrichment programs.

Before instruction, students completed a researcher-designed pretest assessing their understanding of recursive sequences, rate of change, and large numbers. After participating in the modeling activity using Microsoft Excel, they completed a parallel posttest measuring the same learning objectives.

Students' written responses and Excel files were analyzed using a binary scoring procedure. Minor computational or spreadsheet-entry mistakes that did not reflect conceptual misunderstanding were treated separately from genuine misconceptions. Since the paired score differences did not satisfy the normality assumption, the Wilcoxon signed-rank test was used to compare pretest and posttest performances.

Results

The results demonstrate a statistically significant improvement in students' mathematical understanding after the instructional intervention. The Wilcoxon signed-rank test revealed a significant difference between pretest and posttest scores ($p < 0.05$), indicating that the spreadsheet-based modeling activity positively influenced students' conceptual learning.

Students showed notable improvement in recognizing recursive patterns, interpreting rates of change, and reasoning about very large numbers generated by exponential processes. The proportion of students achieving completely correct solutions increased substantially from approximately 18% in the pretest to nearly 70% in the posttest.

Additional analyses indicated positive learning gains across different school types, grade levels, and previous modeling experience, although students with prior exposure to mathematical modeling achieved higher overall performance.

Discussion

The findings suggest that spreadsheet-supported mathematical modeling can effectively strengthen students' conceptual understanding of fundamental mathematical ideas. Rather than emphasizing routine calculations, Excel enabled students to focus on identifying mathematical structures, exploring recursive relationships, visualizing growth processes, and interpreting numerical results.

The modeling context encouraged students to connect abstract mathematical concepts with meaningful real-world situations while reducing the computational burden associated with large numerical calculations. Furthermore, the visual and interactive features of spreadsheets appeared to enhance students' engagement and confidence in solving complex mathematical problems.

Overall, this study provides empirical evidence that integrating mathematical modeling with accessible digital tools such as Microsoft Excel offers a practical and effective instructional approach for secondary mathematics education. Future research may investigate the long-term retention of conceptual understanding and compare spreadsheet-based modeling with other technology-enhanced learning environments.

نقش مدل‌سازی ریاضی در ارتقای یادگیری مفاهیم ریاضی دبیرستان

پروین ترابی^{۱*}، شراره تقی دستجردی^۲، امیرحسین اشتري^۳

۱. نویسنده مسئول، استادیار گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول، ایران. رایانامه: p_torabi@jsu.ac.ir

۲. کارشناس ارشد ریاضی، خانه ریاضیات اصفهان، ایران. رایانامه: sh.dastjerdi@gmail.com

۳. کارشناس ارشد آمار، خانه ریاضیات اصفهان، ایران. رایانامه: amirashtari1373@gmail.com

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله اصیل پژوهشی	هدف این مقاله بررسی نقش مدل‌سازی ریاضی همراه با بهره‌گیری از فناوری آموزشی (نرم‌افزار صفحه‌گسترده اکسل) در یادگیری مفاهیم الگوها و دنباله‌های بازگشتی، آهنگ تغییر و کار با اعداد بزرگ است. بدین منظور یک دوره آموزشی مبتنی بر مدل‌سازی با محتوایی مرتبط با مفاهیم مهم ریاضیات مدرسه‌ای طراحی و اجرا شد تا دانش‌آموزان بتوانند این مفاهیم را در موقعیت‌های واقعی تجربه کنند. در این مطالعه، ۳۳ دانش‌آموز دوره متوسطه در این دوره آموزشی شرکت کردند که در آن با استفاده از اکسل به مدل‌سازی رشد جمعیت خرگوش‌ها پرداختند. داده‌ها از طریق پیش‌آزمون و پس‌آزمون محقق ساخته گردآوری و با استفاده از آزمون ناپارامتری ویلکاکسون تحلیل شد. نتایج نشان داد میانگین نمرات دانش‌آموزان در هر سه متغیر درک الگوها و دنباله‌های بازگشتی، درک مفهوم آهنگ تغییر و درک از اعداد بزرگ و کار با آنها به‌طور معناداری افزایش یافته است؛ به‌ویژه دانش‌آموزان پایه‌های بالاتر به‌طور نسبی رشد بیشتری را نشان دادند. یافته‌ها بیانگر آن است که مدل‌سازی ریاضی همراه با استفاده از فناوری آموزشی می‌تواند زمینه‌ای مناسب برای درک عمیق‌تر دانش‌آموزان از مفاهیم پایه ریاضی فراهم آورد.
کلیدواژه‌ها: مدل‌سازی ریاضی، صفحه‌گسترده (اکسل)، دنباله‌های بازگشتی، آهنگ تغییر، کار با اعداد بزرگ.	
تاریخچه مقاله: تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۹/۱۵ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۱۱/۰۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۱/۲۹ تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۰۳/۱۸	
استناد به این مقاله: ترابی، پروین؛ تقی دستجردی، شراره و اشتري، امیرحسین. (۱۴۰۵). نقش مدل‌سازی ریاضی در ارتقای یادگیری مفاهیم ریاضی دبیرستان، فصلنامه مطالعات برنامه درسی ایران. ۲۱ (۸۰)، ۲۸-۱. https://doi.org/10.22034/jcs.2026.492270.2380	
© نویسندگان ناشر: انجمن مطالعات برنامه درسی ایران	





مقدمه

یادگیری مفاهیم پایه ریاضی نیازمند رویکردهایی است که بتوانند ارتباط میان دانش نظری و تجربه‌های واقعی دانش‌آموزان را تقویت کنند. (Yousefi Hamidi, Salimi and Fallah, 2025). همچنین، کیفیت آموزش در محیط‌های چندفرهنگی زمانی ارتقا می‌یابد که فعالیت‌های فوق‌برنامه بتوانند حلقه ارتباطی میان یادگیری و زندگی روزمره دانش‌آموزان ایجاد کنند (Dehghani and Purasfahani, 2025).

در دهه‌های اخیر، میان آموزشگران ریاضی، توافق گسترده‌ای بر اهمیت استفاده از تکنولوژی در آموزش ریاضیات، به وجود آمده است؛ از این رو اسناد سیاست آموزشی یا چارچوب‌های برنامه‌درسی در کشورهای مختلف نیز، خواستار جایگاه ویژه‌ای برای به‌کارگیری تکنولوژی در همه تجارب ریاضیاتی دانش‌آموزان، به‌ویژه در دوره متوسطه هستند (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). استفاده از تکنولوژی، در دسترس‌ترین سطح کاربرد شامل استفاده از ماشین حساب و در سطوح بالاتر به استفاده از نرم‌افزارهای ریاضی، زبان‌های برنامه‌نویسی و اخیراً هوش مصنوعی برای حل مسائل ختم می‌شود.

از طرفی، با فراگیر شدن جنبش ریاضیات واقعیت‌مدار در دهه ۱۹۷۰ میلادی، اهمیت مسائل مدل‌سازی در آموزش ریاضیات بیش از پیش مورد توجه قرار گرفته است (Ahmadpour et al, 2023). در همین راستا سند برنامه درسی در ایران نیز به استفاده از تکنولوژی و مسائل مدل‌سازی در آموزش رسمی کشور اهمیت داده است. باین‌حال، نه در کتاب‌های نونگاشت و نه در نحوه تدریس معلمان، هنوز آن چنان‌که باید جایی برای این امر باز نشده است (Rafiepour and Rahmani, 2021). به‌علاوه، (Shayan and Yaftiyan 2022) در مطالعه خود نشان دادند که عملکرد ضعیف دانش‌آموزان در آزمون سواد ریاضی تا حد زیادی ناشی از مسائل غیرواقعی و تکراری کتاب‌های درسی است و بازنگری در محتوای آموزشی ضروری است. این کمبود، محققان این پژوهش را بر آن داشت تا با طراحی یک مسئله غنی مدل‌سازی، ضمن آشنا کردن دانش‌آموزان با این نوع از مسائل، زمینه‌ای برای کار با نرم‌افزار اکسل فراهم کرده تا از این طریق دانش‌آموزان نسبت به برخی مفاهیم پایه‌ای ریاضی در دوره متوسطه درک بهتری به دست آورند؛ چراکه نرم‌افزار اکسل به عنوان یک نرم‌افزار در دسترس که به کارگیری آن آسان است، امکاناتی از جمله محاسبات سریع، فرمول‌نویسی، توسیع جدول و رسم نمودار را به راحتی در اختیار کاربران قرار می‌دهد و از این رو می‌تواند به درک بهتر دانش‌آموزان از مفاهیم الگوها، دنباله‌های بازگشتی، آهنگ تغییر، اعداد بزرگ و مهارت کار با آنها کمک نماید. درک درست این مفاهیم زمینه را برای ارتقاء درک دانش‌آموزان از مفاهیم پیشرفته‌تر ریاضی مانند انواع توابع، حد و مشتق فراهم می‌کند.

در تحقیق حاضر به مسئله مدل‌سازی رشد جمعیت خرگوش‌ها پرداخته شده است؛ چرا که علاوه بر دربرداشتن معیارهای مورد نیاز (این معیارها در بخش بعد شرح داده شده‌اند)، برای ادغام آموزش با نرم‌افزار اکسل نیز بسیار مناسب بوده و همچنین دانش‌آموزان از طریق آن چندین بار مجبور به طی کردن چرخه مدل‌سازی خواهند شد. در بخش روش‌شناسی، حالت‌های مختلفی که برای رشد جمعیت خرگوش‌ها تا رسیدن به مدل مناسب استفاده شده است، شرح داده شده است.

مبانی نظری و پیشینه پژوهش

نقش مدل‌سازی ریاضی در ارتقای یادگیری مفاهیم ریاضی دبیرستان

مرور ادبیات پژوهش در سه بخش سازمان‌دهی شده است: (۱) بررسی نقش فناوری آموزشی، به‌ویژه نرم‌افزار صفحه‌گسترده اکسل در آموزش ریاضی؛ (۲) مدل‌سازی ریاضی و تأثیر آن بر فرایند یادگیری؛ و (۳) مفاهیم الگوها، دنباله‌های بازگشتی، آهنگ تغییر و اعداد بزرگ و کار با آنها در دوره متوسطه.

بررسی نقش فناوری آموزشی، به‌ویژه نرم‌افزار صفحه‌گسترده اکسل در آموزش ریاضی

از آنجایی که تکنولوژی جزئی جدانشدنی از زندگی دانش‌آموزان امروزی شده است، می‌توان با استفاده از تکنولوژی، فناوری و ابزارهای دیجیتال توجه دانش‌آموزان را به درس جلب کرده و این امکان را برای آنها فراهم کرد تا آنچه را که می‌آموزند، عمیق‌تر درک کنند.

(National Council of Teachers of Mathematics (2014)، نقش به‌کارگیری فناوری در آموزش ریاضی را در تقویت توانایی دانش‌آموزان برای کاوش و فهم عمیق‌تر مفاهیم و رویه‌ها در ریاضیات و همچنین برقراری ارتباطات و استدلال‌های ریاضی مهم می‌داند. به‌علاوه تصریح می‌کند بهره‌مندی از مجموعه متنوعی از نرم‌افزارهای آموزشی به دانش‌آموزان امکان بررسی موقعیت‌ها و مسائل خاص ریاضی را می‌دهد و آنها را قادر می‌سازد تا با بهره‌گیری از ابزارهای نرم‌افزاری تحلیل داده که قابلیت تولید بازنمایی‌های گوناگون مانند نمودارها، جدول‌ها و نمایش‌های نمادین را دارند، بتوانند هم‌زمان نمایش‌های مختلف از توابع و داده‌ها را مشاهده کنند و کاوش‌های اکتشافی انجام دهند.

یافته‌های (Yousefi et al. (2025 بیانگر آن است که فناوری‌های واقعیت گسترده، به‌ویژه واقعیت افزوده و مجازی، ظرفیت بالایی برای ارتقای یادگیری دانش‌آموزان با اختلالات ریاضی و خواندن دارند و می‌توانند در برنامه‌های درسی تلفیق شوند. علاوه بر این (Dick and Hollebrands (2011 و (Sarama and Clements (2019 تأکید کرده‌اند که تکنولوژی کمک می‌کند تا دانش‌آموزان مجموعه‌ای بزرگ از داده‌ها را (که می‌تواند برگرفته از کنجکاوی خودشان باشد) نمایش دهند، در میان داده‌هایشان کاوش کنند، درباره روابط ریاضی حدس‌هایی بزنند، حدس‌هایشان را آزمایش کنند و نتایجی را از آنها استخراج کنند. لذا، به جای صرف وقت در محاسبات تکراری یا کار با اعداد بزرگ (به شیوه قلم کاغذی)، الگوهایی را در نتایج کشف کنند و به کمک امکان بازنمایی‌هایی مختلف برای یک مسئله، تجسم و درک عمیق‌تری از مفاهیم به دست آورند. این فرایند به تقویت قدرت استدلال و حل مسئله نیز منجر می‌شود.

یکی از نمونه‌های پرکاربرد فناوری در آموزش ریاضی، نرم‌افزارهای صفحه‌گسترده مانند اکسل است. به گزارش (National Council of Teachers of Mathematics (2014، در این نرم‌افزارها نیازی به برنامه‌نویسی پیچیده نیست و روش‌های ریاضی به‌صورت شفاف قابل پیاده‌سازی‌اند. صفحات گسترده می‌توانند به سرعت نتایج محاسبات مکرر را نمایش دهند و جداول مقادیر را با انواع نمایش‌های گرافیکی تولید کنند؛ در نتیجه به دانش‌آموزان کمک می‌کنند تا فهمی عمیق‌تر از ساختارها و روابط ریاضی کسب کنند. همچنین بازخورد آنی در این نرم‌افزارها، آنها را به ابزاری کاربرپسند تبدیل کرده و مطالعه عددی روش‌های ریاضی را لذت‌بخش می‌سازد.

استفاده از صفحات گسترده در آموزش علوم و ریاضیات برای دهه‌ها مورد توجه پژوهشگران بوده است. (Baker and Sugden (2004 نشان دادند که صفحات گسترده از ظرفیت بالایی برای افزایش یادگیری طیف وسیعی از مفاهیم ریاضی و فیزیک برخوردارند و امکان پرداختن به موضوعات متنوع‌تری را فراهم می‌آورند. افزون بر این، مطالعات دیگری نیز بر نقش صفحات گسترده در تسهیل محاسبات مکرر، بازنمایی داده‌ها از طریق جدول‌ها و نمودارها و فراهم‌سازی محیطی تعاملی برای



کشف الگوها و روابط ریاضی تأکید کرده‌اند (National Council of Teachers of Mathematics, 2014; Sarama and Clements, 2019; Dick and Hollebrands, 2011). این پژوهش‌ها نشان می‌دهند که صفحات گسترده در عین سادگی و راحتی برای محاسبات می‌توانند به عنوان محیط‌هایی آموزشی برای تقویت مهارت‌های استدلال و حل مسائل ریاضی و همچنین درک عمیق‌تر ساختارهای ریاضی به کار گرفته شوند.

به طور خاص، در آموزش مفاهیمی چون الگوها، پژوهش‌ها نشان می‌دهند که استفاده از صفحه گسترده می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند تا الگوهای تکراری را شناسایی کرده و رابطه بین جملات متوالی را به صورت معنادار درک کنند. این نوع کار با داده‌ها می‌تواند تفکر جبری را تقویت کند (Healy and Hoyles, 2001; Battista et al, 1998). علاوه بر این، محیط‌های تعاملی و ابزارهای دیجیتال مانند صفحات گسترده چون اکسل، امکان مشاهده تغییرات گسسته و اجرای محاسبات تکراری را فراهم می‌آورند و دانش‌آموزان را قادر می‌سازند تا درک عمیق‌تری از فرآیندهای بازگشتی و وابستگی میان مقادیر به دست آورند. به این ترتیب، استفاده از صفحات گسترده نه تنها مشاهده الگوها بلکه تمرین تفکر بازگشتی و مدل‌سازی پویا را برای دانش‌آموزان تسهیل می‌کند (Sandefur and Manaster, 2022).

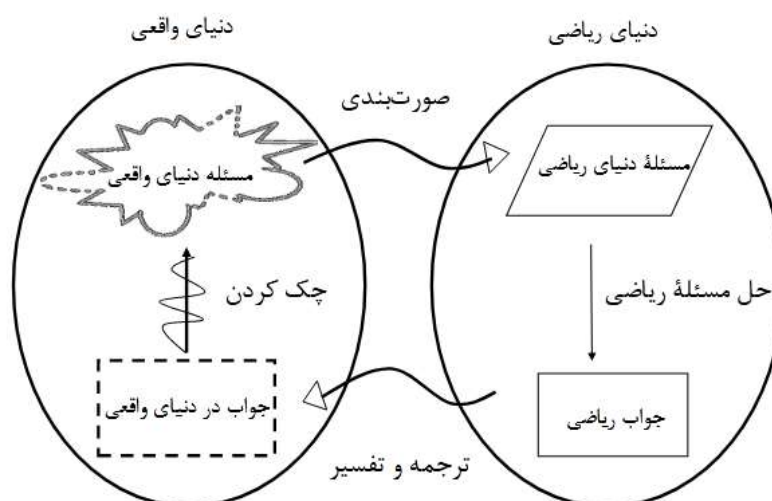
فناوری‌های محاسباتی، از جمله اکسل، با امکان محاسبه اختلاف‌ها، نسبت‌ها و ترسیم نمودارهای هم‌زمان، به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا رابطه بین مقدار و تغییر را به صورت دیداری و عددی بررسی کنند. پژوهش‌ها حاکی از آن است که چنین محیط‌هایی می‌توانند انتقال دانش‌آموزان از درک گسسته تغییر به درک پیوسته آن را تسهیل کنند (Kaput, 1994; Hoyles and Noss, 2003). در این چارچوب، مدل‌سازی رشد جمعیت به عنوان نمونه‌ای اصیل از یک فرایند بازگشتی، با فراهم آوردن امکان مشاهده هم‌زمان الگوها، دنباله‌های بازگشتی و آهنگ تغییر، می‌تواند بستری مناسب برای تقویت درک مفهومی دانش‌آموزان از این مفاهیم فراهم آورد.

مدل‌سازی ریاضی و تأثیر آن بر فرایند یادگیری

Pollak (2007) با طرح این پرسش که چه چیزهایی را در ریاضی باید به دانش‌آموزان آموزش بدهیم، از دو نقطه نظر متفاوت پاسخ آن را بررسی می‌کند: ریاضیدانان و دانش‌آموزان. به گفته او اکثر ریاضیدانان، به اهمیت و زیبایی و اکثر دانش‌آموزان به سودمندی ریاضیات متمایل هستند. مسائل مدل‌سازی می‌توانند جنبه سودمندی ریاضیات را به خوبی نشان دهند چرا که این نوع از مسائل، دانش‌آموزان را برای یادگیری ریاضی برمی‌انگیزاند (Pierce and Stacey, 2006) و به دانش‌آموزان امکان بررسی پدیده‌های تجربی و مسائل محیط زندگی، پیش‌بینی و توضیح سازوکار آن‌ها را می‌دهند (Confrey and Meloney, 2007; Greer and Mukhopadhyay, 2012). همچنین نشان داده شده است که استفاده از مسائل مدل‌سازی در آموزش می‌تواند منجر به تغییر نگرش دانش‌آموزان نسبت به ریاضی (Parhizgar, Alemolhodaie and Jabbari Noqabi, 2017) و افزایش اشتیاق آنها گردد (Parhizgar, Jabbari Noqabi and Alemolhodaie, 2020).

اما برای حل یک مسئله مدل‌سازی چه فرایندی طی می‌شود که این دست از مسائل در آموزش ارزشمند می‌گردد؟ برای این منظور نیاز است در ابتدا موقعیت مسئله از دنیای واقعی به ریاضی صورت‌بندی شود، مفاهیم مختلف ریاضی مرتبط با شناسایی رویه‌ها و استدلال مناسب برای حل ریاضی مسئله به کار گرفته شود، پاسخ به دست آمده در دنیای واقعی تفسیر و اعتبار مدل بررسی شود تا در صورت نیاز مراحل طی شده از نو تکرار شوند. در ریاضیات به کارگرفته شده برای حل مسائل دنیای واقعی، پنهانی یا آشکارا یک «مدل ریاضی» وجود دارد که بین بخشی از دنیای واقعی و بخشی از دنیای ریاضی ارتباطی دو سویه برقرار می‌کند که در طی حل مسئله ممکن است بارها مورد بازبینی قرار گیرد. به این ترتیب چرخه‌ای خواهیم داشت

که از این پس آن را چرخه مدل‌سازی می‌نامیم. شکل ۱ مراحل حل مسائل مدل‌سازی را در قالب چرخه مدل‌سازی نشان می‌دهد.



شکل ۱: چرخه مدل‌سازی (Freudenthal (1982) به نقل از (Ahmadpour, Fadaei and Rafiepour (2011)

در مقایسه مسائل کاربردی با مسائل مدل‌سازی به گفته Freudenthal (1982) اکتفا می‌شود:

«از دیدگاه آموزش، کاربرد، یک دیدگاه نادرست است. دیدگاه درست عمدتاً از محیط [یعنی دنیای واقعی] به سمت ریاضی [یعنی مدل‌سازی ریاضی] است نه اینکه اول ریاضی و سپس برگشت به دنیای واقعی [باشد].»

علی‌رغم لزوم وارد شدن مسائل مدل‌سازی در برنامه درسی (National Curriculum Development Secretariat, 2010; Secretariat of the Supreme Council of Education, 2012)، با این حال با تأمل در مسائل کتاب‌های درسی، تعداد کمی از آن‌ها به معنای واقعی مدل‌سازی هستند و اغلب در دسته مسائل کلامی و مسائل کاربردهای استاندارد (مانند مسائل بهینه‌سازی که اغلب مدل از پیش مشخصی دارند) قرار می‌گیرند. برای مثال، مطالعه Rafiepour and Molayi (2020) نشان داد که مسائل مدل‌سازی در کتاب‌های ریاضی دوره اول و دوم متوسطه فاصله زیادی با رویکرد مدل‌سازی دارند. Pierce & Stacey (2006) معتقدند که یک مسئله مدل‌سازی باید برای دانش‌آموزان باورپذیر بوده و آنها را برای کاوش و حل مسئله برانگیزاند و آن‌چنان غنی باشد که علاوه بر نشان دادن چگونگی کاربرد ریاضی در دنیای واقعی بتواند دانش ریاضی و مهارت حل مسئله دانش‌آموزان را توسعه دهد.

مطالعه الگوها، دنباله‌های بازگشتی، آهنگ تغییر و کاربست اعداد بزرگ در دوره متوسطه

به اعتقاد Mason (1996) درک دانش‌آموزان از دنباله‌ها و الگوها، نقش بنیادینی در توسعه تفکر جبری و تابعی آنان ایفا می‌کند. در این راستا، آموزشگران و برنامه‌ریزان درسی اصلاحاتی را در برنامه درسی ابتدایی پیشنهاد کرده‌اند تا دانش‌آموزان در بستری مانند الگوها از دوره ابتدایی با تفکر جبری آشنا شوند (Khosroshahi and Asghari, 2016).

برنامه درسی ریاضی ایران نیز از این امر مستثنی نبوده و از مقطع ابتدایی موضوع الگوها را در کتاب‌های درسی ریاضی وارد کرده است. این روند در دوره متوسطه اول نیز ادامه یافته، هرچند الگوها و دنباله‌ها در این مقطع عمدتاً خطی یا حداکثر درجه دوم هستند. در دوره متوسطه دوم، این موضوع به معرفی انواع مختلف دنباله‌ها تعمیم یافته و در کتاب ریاضی پایه دهم برای نخستین بار دنباله‌های بازگشتی، حسابی و هندسی به‌طور رسمی مورد تأکید قرار گرفته‌اند. دنباله‌های بازگشتی، به دلیل



وابستگی هر جمله به جمله پیشین، مستلزم درک فرایندهای تکراری و پویا هستند و نه صرفاً شناسایی الگوهای ایستا. تحقیقات نشان می‌دهند که تحلیل چنین توالی‌هایی می‌تواند به توسعه تفکر ریاضی دانش‌آموزان، از جمله توانایی تحلیل روابط متوالی و پیش‌بینی مقادیر بعدی، کمک کند (Sandefur and Manaster, 2022). با این حال، تحقیقات مبین آن است که بسیاری از دانش‌آموزان در مواجهه با دنباله‌های بازگشتی، تمرکز خود را بر محاسبه عددی جملات محدود می‌کنند و در تشخیص ساختار بازگشتی زیربنایی ناتوان هستند (Tall and Vinner, 1981). در این راستا، استفاده از بازنمایی‌های چندگانه نظیر جدول، نمودار و نمایش عددی می‌تواند به درک عمیق‌تر روابط بازگشتی کمک کند (Duval, 2006).

افزون بر این، اهداف دیگری نیز در آموزش مفاهیم جبری در این پایه‌ها مطرح شده است؛ از جمله تحلیل نرخ تغییر توابع و دنباله‌ها، درک تفاوت میان انواع توابع (نمایی، خطی، درجه دوم و لگاریتمی)، شناسایی روابط کمی در موقعیت‌های مختلف و تعیین توابع متناظر با آن‌ها، استفاده از عبارات‌های نمادی شامل صورت‌های بازگشتی برای نمایش روابط در زمینه‌های گوناگون، دستیابی به نتایج معقول در موقعیت‌های مدل‌سازی‌شده، و تخمین و تفسیر نرخ تغییر داده‌های عددی و نموداری (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

Thompson (1994) آهنگ تغییر را به عنوان یک نسبت ثابت انتزاعی شده در ذهن تعریف می‌کند که مقایسه ساختارهای متغیر را ممکن می‌سازد. او همچنین معتقد است ساخت مفهومی آهنگ تغییر یکی از عناصر کلیدی در توسعه ریاضیات است. پژوهش Carlson et al (2002) نشان می‌دهند که دانش‌آموزان و دانشجویان، اغلب آهنگ تغییر را به صورت ایستا و صرفاً به عنوان تفاوت یا نسبت ساده بین دو مقدار درک می‌کنند اما در فهم ماهیت پویا و وابسته به تغییرات پیوسته کمیت‌ها، به خصوص در موقعیت‌های تابعی دچار مشکل هستند. مدل‌های رشد جمعیت، به ویژه مدل‌های نمایی و لجستیک (که در پژوهش حاضر مورد استفاده قرار گرفته‌اند)، نمونه‌های مناسبی برای نمایش آهنگ تغییر متغیر هستند؛ زیرا در این مدل‌ها مقدار تغییر به جمعیت موجود وابسته است. در پژوهش Confrey and Smith (1994) بر نقش کار با داده‌های گسسته و جدول‌ها برای بررسی تغییرات یک کمیت با تغییرات کمیت دیگر تأکید شده است. این رویکرد زمینه‌ای مناسبی برای شکل‌گیری درک شهودی از آهنگ تغییر فراهم می‌آورد.

در زمینه درک اعداد بزرگ و کار با آنها، National Council of Teachers of Mathematics (2000) تأکید می‌کند دانش‌آموزان پایه‌های نهم تا دوازدهم باید درک عمیقی از اعداد بزرگ کسب کنند و بتوانند آن‌ها را با روش‌های مختلف بازنمایی نمایند. اما درک اعداد بزرگ و مقیاس‌های عددی یکی از چالش‌های یادگیری ریاضی است، به ویژه در موقعیت‌هایی مانند رشد نمایی که با تغییرات سریع همراه می‌شود (Resnick et al, 1989). به علاوه، پژوهش‌ها نشان می‌دهند که دانش‌آموزان اغلب در تفسیر معنای اعداد بسیار بزرگ، مقایسه آن‌ها و تشخیص معقول بودن نتایج عددی دچار مشکل هستند (Dehaene, 2011). از این رو National Council of Teachers of Mathematics (2000) پیشنهاد می‌دهد، مدل‌های رشد جمعیت می‌تواند به طور طبیعی دانش‌آموزان را با اعداد بزرگ، توان‌ها و نماد علمی مواجه می‌کنند. به علاوه، استفاده از ابزارهای دیجیتال می‌تواند بار محاسباتی کار با این اعداد را کاهش داده و تمرکز دانش‌آموزان را بر تفسیر و معنا معطوف کند (Sweller, 1998). در این راستا، اکسل با نمایش هم‌زمان داده‌های عددی و نموداری، امکان مقایسه مقیاس‌ها و مشاهده رشد سریع مقادیر را فراهم می‌آورد و می‌تواند درک دانش‌آموزان از اعداد بزرگ و رفتار آن‌ها را در مدل‌های ریاضی بهبود بخشد.

سؤالات پژوهش

با مطالعات کتابخانه‌ای در مورد اهداف ذکر شده در بخش قبل که برنامه درسی ریاضی ایران نیز همسو با آن است، محتوای کارگاه‌های مورد نظر به گونه‌ای طراحی گردید که تأثیر مدل‌سازی رشد جمعیت با به‌کارگیری نرم‌افزار اکسل بر درک دانش‌آموزان از سه متغیر الگوها و دنباله‌های بازگشتی، آهنگ تغییر و اعداد بزرگ و توانایی کار کردن با آن‌ها سنجیده شود. لذا این پژوهش بر آن است تا به سؤالات زیر پاسخ دهد:

استفاده از مسئله مدل‌سازی رشد جمعیت با به‌کارگیری نرم‌افزار اکسل چه تأثیری بر درک دانش‌آموزان از

۱. مفاهیم الگوها و دنباله‌های بازگشتی دارد؟

۲. مفهوم آهنگ تغییر دارد؟

۳. اعداد بزرگ و توانایی کار کردن با آنها دارد؟

روش پژوهش

پژوهش حاضر از نوع آزمایشی است که در آن از طرح «یک گروهی پیش‌آزمون-پس‌آزمون» استفاده شده است (Ary, Jacobs and Razavieh, 2001) که دوره آموزشی مورد نظر، به‌عنوان مداخله آموزشی این پژوهش است. پیش و پس از این اجرای این دوره از شرکت‌کنندگان آزمون‌های محقق‌ساخته گرفته شد. شرکت‌کنندگان این پژوهش شامل ۳۳ دانش‌آموز دوره متوسطه که در واقع نمونه‌های در دسترس محققان بودند. لازم به ذکر است، علی‌رغم محدودیت‌های این نوع از نمونه‌گیری برای تعمیم نتایج، استفاده از نمونه‌گیری در دسترس در پژوهش‌های کمی و شبه‌تجربی، در شرایطی که دسترسی به نمونه تصادفی امکان‌پذیر نیست، پذیرفته شده است (Creswell, 2014).

شرکت‌کنندگان از دو شهر اصفهان (۱۸ نفر) و زنجان (۱۵ نفر) بودند که در تابستان ۱۴۰۲ در دوره آموزشی مذکور به‌طور رایگان شرکت کردند. انتخاب دو شهر اصفهان و زنجان برای اجرای پژوهش بر اساس همکاری مراکز آموزشی خانه ریاضیات اصفهان و خانه علم زنجان صورت گرفت. این دو مرکز به دلیل سابقه فعالیت‌هایشان در آموزش‌های کاربردی در زمینه ریاضیات و برگزاری کارگاه‌ها و مسابقاتی در زمینه مدل‌سازی ریاضی امکان جذب راحت‌تر دانش‌آموزان علاقه‌مند به شرکت در این دوره را داشتند. به علاوه هر دوی این مراکز مجهز به آزمایشگاه رایانه بودند که دسترسی شرکت‌کنندگان به رایانه را برای کار با نرم‌افزار اکسل فراهم می‌آوردند. لازم به ذکر است که ۱۱ نفر از شرکت‌کنندگان اصفهانی از برگزیدگان مسابقه مدل‌سازی ایلیمپاد ریاضی خانه ریاضیات اصفهان بودند. حضور این گروه در پژوهش ناشی از شیوه نمونه‌گیری در دسترس برای برگزاری دوره در خانه ریاضیات اصفهان بوده است.

اطلاعات جمعیت‌شناسی شرکت‌کنندگان در این پژوهش به شرح زیر است:

- جنسیت: ۱۹ نفر دختر، ۱۴ نفر پسر

- پایه تحصیلی: ۸ نفر پایه نهم، ۲۰ نفر پایه دهم و ۵ نفر پایه یازدهم

- رشته تحصیلی: ۲۷ نفر رشته ریاضی و ۶ نفر رشته تجربی

۱. مسابقه مدل‌سازی ایلیمپاد ریاضی خانه ریاضیات، رقابتی است که در آن دانش‌آموزان باید مسائل واقعی یا شبه‌واقعی را با استفاده از چرخه مدل‌سازی ریاضی صورت‌بندی، تحلیل و حل کنند. بنابراین، برگزیده شدن در این مسابقه نشان‌دهنده آن است که شرکت‌کنندگان پیش‌تر تجربه عملی در طراحی مدل‌های ریاضی و کار با ابزارهای مرتبط داشته‌اند.



- نوع مدارس: ۲۲ نفر مدارس عادی و ۱۱ نفر مدارس استعداد درخشان (تیزهوشان)

همان‌طور که مشاهده می‌شود نمونه پژوهش شامل دانش‌آموزانی با ویژگی‌های متنوع از نظر پایه تحصیلی، جنسیت، رشته و نوع مدرسه بودند. با توجه به ناهمگونی نمونه و به‌منظور کاهش اثر آن بر نتایج، برای مقایسه نمرات پیش‌آزمون و پس‌آزمون از آزمون ناپارامتری ویلکاکسون استفاده شد. این آزمون برای تحلیل داده‌های جفتی (پیش‌آزمون-پس‌آزمون) در شرایطی که فرض نرمال بودن داده‌ها برقرار نباشد یا تفاوت‌های فردی قابل توجه باشند، توصیه می‌شود (Ary, Jacobs and Razavieh, 2001).

در ادامه به تفصیل ابزار این پژوهش شامل معرفی مسئله مدل‌سازی استفاده شده در این دوره، روند اجرای این دوره، سؤالات پیش‌آزمون و پس‌آزمون و روش تحلیل داده‌ها شرح داده خواهد شد.

مسئله مدل‌سازی رشد جمعیت خرگوش‌ها

مسئله رشد جمعیت خرگوش‌ها هم از نظر ارتباط داشتن با مفاهیم ریاضی مختلفی از جمله مفاهیم مورد نظر در این پژوهش و هم از نظر قابلیتش برای مدل‌سازی عددی به ویژه در محیط اکسل، به عنوان مسئله اصلی مدل‌سازی در این پژوهش انتخاب گردید.

در چرخه مدل‌سازی، کار با یک صورت‌بندی اولیه شروع می‌شود. در این صورت‌بندی اولیه، فرض‌ها و عوامل دخیل در مسئله به طور آگاهانه ساده‌سازی یا حتی برخی از آنها کنار گذاشته می‌شوند تا یک مدل ابتدایی به دست آید. این مدل اولیه، دست‌مایه‌ای برای ایجاد مدل‌های پیچیده‌تر، ناشی از در نظر گرفتن فرضیات بیشتر و اغلب واقعی‌تر در طی چندباره چرخه مدل‌سازی می‌گردد. از آنجا که اغلب دانش‌آموزان در طول تحصیل خود فرصت آشنایی با مسائل مدل‌سازی و به طبع این نوع از ساده‌سازی‌ها در فرضیات را ندارند (Rafiepour and Rahmani, 2021)، در طراحی این دوره، لازم بود مسئله ابتدایی درمورد رشد جمعیت خرگوش‌ها دارای فرضیات بسیار ساده و غیرواقعی باشد. سپس با نقد و بازنگری در نتایج به دست آمده از مدل حاصل از این فرضیات، هر بار محدودیت‌های بیشتر و البته واقعی‌تری (مانند میانگین تعداد خرگوش‌های متولد شده در هر زایمان، نرخ مرگ‌ومیر و ظرفیت محیط) به مسئله اضافه شود. بدین ترتیب، مسئله از حالت انتزاعی به یک مسئله زمینه‌مدار نزدیک‌تر به واقعیت تبدیل می‌شود و دانش‌آموزان فرایند تدریجی و تکراری مدل‌سازی را تجربه می‌کنند. صورت‌بندی ساده اولیه مسئله عبارت است از:

فرض کنید در جزیره‌ای یک جفت خرگوش زندگی می‌کند. تا ۳ سال آینده جمعیت خرگوش‌ها چگونه تغییر می‌کند؟

سه امکان مختلف برای جمعیت خرگوش‌ها در سال‌های بعدی وجود دارد: کاهش جمعیت، افزایش جمعیت یا ثابت ماندن جمعیت که این حالت‌ها وابسته به عواملی از جمله جنسیت خرگوش‌ها، میزان زادوولدشان، امکانات جزیره برای زندگی خرگوش‌ها (مانند آب، غذا، سرپناه)، خطرات محیطی (مانند شکارچیان، بیماری‌ها و حوادث طبیعی) و مرگ طبیعی خرگوش‌ها است.

برای هدایت تدریجی دانش‌آموزان در چرخه مدل‌سازی، ابتدا ۳ حالت^۱ از مسئله با مفروضات متفاوت بررسی می‌شود و سپس به یک مدل ریاضی مشخص (مدل لجستیک) می‌رسیم. در هر حالت، دانش‌آموزان با بررسی کاستی‌های آن حالت،

۱. در این مقاله، واژه «حالت» به پیکربندی‌های متفاوت فرضیات مسئله اشاره دارد. واژه «مدل» زمانی به کار می‌رود که یک ساختار ریاضی مشخص با پارامترهای تعریف‌شده برای تبیین رفتار سیستم ارائه شود (مانند مدل لجستیک).

مؤثرترین عوامل در رشد جمعیت خرگوش‌ها را شناسایی می‌کنند. به این ترتیب دانش‌آموزان می‌توانند با در نظر گرفتن عوامل با اهمیت‌تر و رفع کاستی‌های حالت قبلی به حالت واقعی‌تری دست یابند. در سه حالت اول، ضمن بررسی نرخ زادوولد و نرخ مرگ‌ومیر به مفهوم آهنگ تغییر در رشد جمعیت پرداخته می‌شود. پیاده‌سازی این حالت‌ها با اکسل کمک می‌کند تا دانش‌آموزان تغییرات جمعیت را در بازه‌های طولانی به سادگی محاسبه کنند و به این ترتیب درک خوبی از اعداد بزرگ و به کارگیری آن‌ها به دست آورند. همچنین این نرم افزار زمینه خوبی برای آشنایی با چگونگی رسم نمودارها و بهبود درک شهودی دانش‌آموزان از ماهیت تغییرات با نرخ‌های خطی، درجه دو، نمایی و لگاریتمی فراهم می‌کند. از طرفی، پیاده‌سازی هر حالت با نرم‌افزار نیازمند درک درست و به کارگیری مفاهیم الگوها، دنباله‌های بازگشتی، آهنگ تغییر و همچنین استفاده از دستورات فرمول‌نویسی، توسیع دادن جداول و رسم نمودار است.

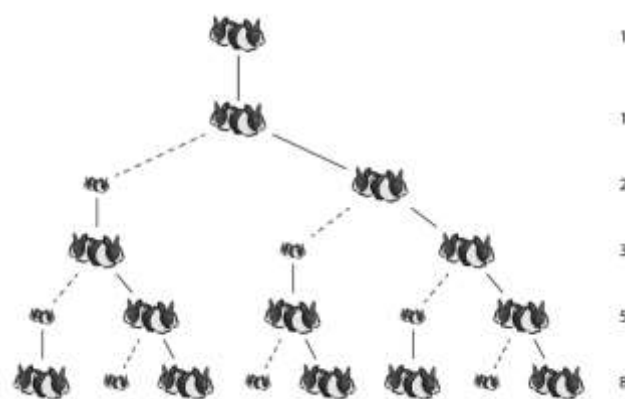
پیش از تشریح جزئیات صورتبندی مسئله در هر یک از این حالت‌ها لازم است اشاره شود در طراحی دوره توسط محققان/مدرسین، ۳ حالت اولیه (به طور عامدانه) چنان در نظر گرفته شده‌اند که همگی انفجار جمعیت خرگوش‌ها را در مدت کوتاهی نشان دهند چراکه رشد جمعیت در این سه حالت صرفاً بر اساس نرخ زادوولد (و نرخ مرگ و میر) است که از توابع نمایی پیروی می‌کند. پیاده‌سازی این ۳ حالت در اکسل این انفجار جمعیت را به وضوح برای دانش‌آموزان قابل مشاهده و قابل درک می‌کند. بدین ترتیب، دانش‌آموزان که انفجار جمعیت را دور از شرایط دنیای واقعی می‌بینند، به عامل بسیار مهم «ظرفیت تحمل محیط» در مسئله رشد جمعیت خرگوش‌ها معطوف می‌شوند (که بیانگر عوامل محدودکننده امکانات زیست-محیطی در جزیره مانند مکان و غذا است). بنابراین در حالت چهارم برای رشد جمعیت خرگوش‌ها که مدل لجستیک نام دارد، عوامل مهمی چون نرخ زادوولد، نرخ مرگ‌ومیر و ظرفیت محیط توأملاً لحاظ می‌شود (Mitchell, 2021; Berger and Starbird, 2017). مدل لجستیک یکی از مدل‌های شناخته‌شده در بررسی رشد جمعیت است که برخلاف مدل نمایی تصویری واقعی‌تر از رشد جمعیت به دست می‌دهد. در این مدل دانش‌آموزان می‌بینند که جمعیت خرگوش‌ها پس از یک رشد سریع، به تدریج به سمت یک مقدار پایدار نزدیک می‌شود. بنابراین، این مدل ارتباط مستقیمی با مسئله خرگوش‌ها دارد و می‌تواند رفتار واقعی‌تر جمعیت را در بازه سه‌ساله پیش‌بینی کند. در ادامه، حالت‌های ۱ تا ۴ شرح داده می‌شود.

حالت ۱. در حالت اول مسئله فیبوناچی^۱ بررسی می‌شود (شکل ۱) فرضیات این مسئله چنین است:

- ۱- یک جفت خرگوش نر و ماده تازه متولد شده داریم.
- ۲- خرگوش‌ها پس از یک ماه بالغ می‌شوند.
- ۳- دوران بارداری خرگوش‌ها یک ماه است.
- ۴- هنگامی که خرگوش ماده به سن بلوغ می‌رسد حتماً باردار می‌شود.
- ۵- در هر زایمان هر خرگوش ماده یک خرگوش نر و یک خرگوش ماده به دنیا می‌آورد.
- ۶- خرگوش‌ها نمی‌میرند.

سؤال این است که پس از گذشت یک سال چند جفت خرگوش خواهیم داشت؟

رابطه‌ای که در نهایت دانش‌آموزان بدان دست می‌یابند چنین است: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ که نمودار آن به شکل نمایی است و به راحتی در اکسل رسم می‌شود.



شکل ۲. رشد جمعیت خرگوش‌ها در مسئله فیبوناچی در ماه‌های اول تا ششم

در توضیح فرضیات (غیر واقعی) این حالت باید تذکر داده شود، هدف از طرح این حالت آن بود که دانش‌آموزان بتوانند مسئله را با فرضیاتی بسیار ساده بررسی کنند، روابط بین متغیرهای آن را به صورت جبری بیان کنند، برای پیش‌بینی جمعیت در ماه‌های بعدی، دنباله بازگشتی بنویسند و رابطه به دست آمده را در محیط اکسل فرمول‌نویسی کرده و برای آن جدول و نمودار رسم کنند. همان طور که پیش‌تر اشاره شد، چنین ساده‌سازی‌هایی، آگاهانه انجام می‌شود تا ابتدا در یک مسئله ساده، ارتباطات عوامل مهم، کشف و به زبان ریاضی صورت‌بندی شوند و سپس با طی کردن دوباره چرخه مدلسازی، فرضیات واقعی‌تری در مسئله لحاظ شوند؛ زیرا وارد کردن همه شرایط از ابتدا، دستیابی به مدل را به ویژه برای دانش‌آموزان ناممکن یا بسیار سخت و پیچیده خواهد کرد.

حالت ۲. در این حالت، فرضیات (به لحاظ سن بلوغ و تعداد جفت خرگوش‌های زایمان شده در هر ماه) انطباق بیشتری با واقعیت دارند. بدین ترتیب که فرضیات زیر جایگزین فرضیات ۲ و ۵ در حالت ۱ می‌شوند:

- ۶ ماه طول می‌کشد تا هر خرگوش بالغ شود.

- در هر زایمان هر خرگوش ماده ۶ جفت خرگوش نر و ماده به دنیا می‌آورد.

در این حالت رابطه‌ای که در نهایت دانش‌آموزان بدان دست می‌یابند چنین است: $F_{n+1} = F_n + 6F_{n-4}$. نمودار این رابطه نیز به راحتی در اکسل قابل رسم است و دیده می‌شود که از نوع نمایی است.

توضیح آن که مفروضات واقعی‌تر در این حالت، زمینه‌ای را برای افزایش مهارت دانش‌آموزان در یافتن روابط بین عوامل مهم در فرضیات مسئله، فرمول‌نویسی، توسیع دادن جدول و رسم نمودار در اکسل فراهم می‌کند. در نظر گرفتن مفروضات جدید در این حالت، چنان چالش‌برانگیز است که بدون طی کردن حالت اول، دستیابی به دنباله بازگشتی و پیاده‌سازی حالت دوم در اکسل برای دانش‌آموزان بسیار دشوار می‌شد. ضمن آن که وارد شدن این مفروضات به تنهایی آن قدر پیچیدگی داشت که دیگر نتوان در این مرحله عامل مرگ و میر خرگوش‌ها را نیز در نظر گرفت.

حالت ۳. در حالت سوم، نرخ رشد جمعیت (یعنی تفاضل نرخ مرگ و میر از نرخ زاد و ولد خرگوش‌ها) نیز به فرضیات مدل اضافه می‌گردد. اگر n_t ، B و D به ترتیب جمعیت خرگوش‌ها در ماه t ام، نرخ زاد و ولد و نرخ مرگ و میر در هر ماه باشند، جمعیت خرگوش‌ها در هر ماه بر حسب جمعیت ماه قبل از رابطه زیر به دست می‌آید:

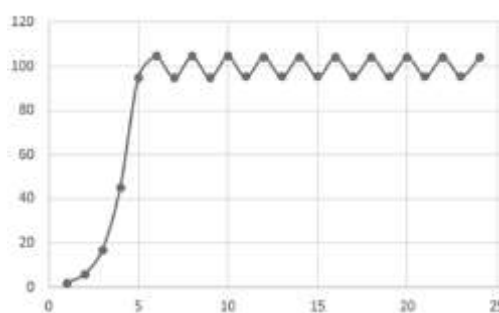
$$n_t = n_{t-1} + B \times n_{t-1} - D \times n_{t-1} \quad \text{یا} \quad n_t = n_{t-1} + R \times n_{t-1}$$

که در آن $R=B-D$ نرخ رشد است. با بررسی مقادیر مختلف در اکسل برای نرخ رشد، مشاهده می‌شود که اگر $B > D$ باز هم نمودار رشد جمعیت به صورت نمایی خواهد بود (شکل ۳).



شکل ۳. نمونه‌ای از مدل‌سازی عددی جمعیت خرگوش‌ها در اکسل با در نظر گرفتن نرخ رشد برابر ۱/۷

حالت ۴. (مدل لجستیک) بررسی حالت سوم نشان می‌دهد حتی با در نظر گرفتن نرخ مرگ‌ومیر، مدل به دست آمده هنوز از واقعیت بسیار دور است. بدین ترتیب با بازنگری در عوامل دخیل در رشد جمعیت خرگوش‌ها، نقش عامل ظرفیت تحمل محیط مشخص می‌شود. در واقع به دلیل محدودیت‌های محیطی، جمعیت نمی‌تواند بیشتر از ظرفیت تحمل محیط (K) باشد و اگر چنین شد، بلافاصله جمعیت کاهش می‌یابد. همچنین نرخ رشد جمعیت با ظرفیت باقی‌مانده از کل ظرفیت تحمل محیط رابطه مستقیم دارد و لذا به صورت $R_t = Q \times (K - n_{t-1})$ قابل بیان است که در آن Q یک ضریب ثابت می‌باشد؛ بنابراین نرخ رشد جمعیت تابعی از زمان خواهد بود. از رابطه $n_t = R_t \times n_{t-1} + n_{t-1}$ ، جمعیت هر سال بر اساس جمعیت سال قبل محاسبه می‌شود. این مدل رشد جمعیت که به مدل لجستیک موسوم است انطباق بیشتری با واقعیت دارد. شکل ۴، نمودار این مدل را (برای ظرفیت تحمل محیط ۱۰۰ در مدت ۲۵ ماه) که در اکسل رسم شده است، نشان می‌دهد.



شکل ۴. مدل لجستیک برای رشد جمعیت خرگوش‌ها

تفاوت نمودار این مدل با ۳ حالت قبلی، درک تازه‌ای از توابع غیرخطی ایجاد می‌کند که ویژگی‌های متفاوتی نسبت به نمودار ۳ حالت قبلی دارد و از این رو منجر به توسعه درک مفهوم آهنگ تغییر می‌شود. همان طور که در این فرایند دیده می‌شود، نرم‌افزار اکسل به‌عنوان ابزار کمکی مورد استفاده قرار می‌گیرد تا محاسبات عددی و ترسیم نمودارها ساده‌تر شود. این امر به دانش‌آموزان امکان می‌دهد بدون درگیر شدن با جزئیات پیچیده محاسبات،



تغییرات جمعیت را به صورت بصری مشاهده کنند و منطق اصلاح مدل‌ها (مانند افزودن نرخ مرگ‌ومیر یا ظرفیت محیط) را بهتر درک نمایند. بنابراین، اکسل درک موضوع را برای دانش‌آموزان ساده‌تر می‌سازد.

اجرای دوره

این دوره در چهار جلسه ۹۰ دقیقه‌ای طراحی شد. در جدول ۱ زمان‌بندی اجرای محتوای دوره دیده می‌شود.

جدول ۱. زمان‌بندی اجرای محتوای دوره

شماره جلسه	محتوای جلسه	زمان‌بندی
جلسه اول	آشنایی مقدماتی با اکسل	۴۰ دقیقه
	معرفی مسائل مدل‌سازی و چرخه مدل‌سازی	۲۰ دقیقه
	گرفتن پیش‌آزمون	۳۰ دقیقه
جلسه دوم	معرفی مسئله جمعیت خرگوش‌ها	۲۰ دقیقه
	معرفی مدل فیبوناچی (حالت ۱) و بررسی آن	۵۰ دقیقه
	بازبینی در برخی از فرضیات مدل فیبوناچی (حالت ۲)	۲۰ دقیقه
جلسه سوم	بررسی حالت ۲ با کمک اکسل	۳۰ دقیقه
	وارد کردن، نرخ زادوولد، نرخ مرگ‌ومیر و نرخ رشد (حالت ۳)	۳۰ دقیقه
	بررسی حالت ۳ با کمک اکسل	۳۰ دقیقه
جلسه چهارم	اصلاح حالت اخیر از طریق وارد کردن عامل ظرفیت تحمل محیط و دستیابی به مدل لجستیک (حالت ۴)	۲۵ دقیقه
	بررسی مدل لجستیک با کمک اکسل	۲۵ دقیقه
	گرفتن پس‌آزمون	۳۰ دقیقه
	انجام نظرسنجی	۱۰ دقیقه

پس از طراحی دوره، در جلسه‌ای با حضور ۲۰ نفر از معلمان با تجربه اصفهان، اهداف، محتوا و روند اجرای دوره ارائه شد تا معلمان نظراتشان را مورد محتوای آماده شده بیان کنند و در ضمن تجربیاتشان را در خصوص آموزش مفاهیم مورد نظر و چالش‌های دانش‌آموزان در یادگیری آن‌ها بیان کنند. چالش‌های برشمرده شده توسط معلمان عبارت بودند از: «دشواری در استفاده مناسب از اندیس‌ها و نوشتن ضابطه صریح دنباله، سختی درک مفهوم آهنگ تغییر (و مفاهیم دخیل در آن مانند درک مفهوم نسبت) و ارتباط بین بازنمایی‌های نموداری و جبری این مفهوم، انتقال بین حروف مختلف به‌عنوان متغیرهای مستقل و وابسته و درک قابلیت این مفهوم برای مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های طبیعی به‌عنوان یک مفهوم محوری و وحدت‌بخش». معلمان ضمن تأیید ساختار دوره (یعنی حالت‌هایی که در بالا بدان اشاره شد و استفاده از اکسل برای مدل‌سازی عددی و درک بهتر مفاهیم) اغلب پیشنهاد دادند بهتر است این دوره برای دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه ارائه شود. با این حال، تجربه سال‌ها برگزاری کارگاه‌های مدل‌سازی توسط محققان در خانه ریاضیات اصفهان حاکی از آن بود که حتی دانش‌آموزان پایه نهم نیز می‌توانند با هدایت مدرسین، گام‌های لازم برای مدل‌سازی مورد نظر در این دوره را بردارند. هدایت مدرسین در این دوره شامل استفاده از مثال‌های ملموس برای فهم بهتر مفاهیم مورد نظر، ساده‌سازی مفروضات اولیه در حالت‌های ابتدایی

و پیچیده کردن تدریجی مفروضات و مفاهیم به کار رفته در آنها و بهره‌گیری از نرم‌افزار اکسل برای بازنمایی بصری در چرخه مدل‌سازی بود.

طراحی پیش‌آزمون و پس‌آزمون

با توجه به سؤالات پژوهش و محتوای دوره آموزشی، محققان سؤال‌هایی را برای پیش‌آزمون و پس‌آزمون طراحی کردند به گونه‌ای که پیش‌آزمون برای سنجش سطح اولیه درک دانش‌آموزان از مفاهیم مورد نظر و پس‌آزمون برای بررسی میزان تأثیر مداخله آموزشی بر درک این مفاهیم مناسب باشد. در ادامه، این سؤالات آورده می‌شود. به علاوه، به منظور بررسی روایی محتوایی پیش‌آزمون و پس‌آزمون توضیح داده می‌شود که هر یک از سؤال‌های این دو آزمون چگونه با اهداف مداخله آموزشی و مفاهیم مورد مطالعه هم‌راستا هستند.

پیش‌آزمون: هیوا فروردین امسال یک گیاه کوچک هدیه گرفت. روز اول این گیاه فقط یک ساقه داشت با دو برگ. یک ماه بعد، از این شاخه، دو شاخه دیگر روید که هر کدام از شاخه‌های جدید نیز دو برگ داشتند. اگر گیاه هیوا، در ماه‌های بعدی هم به همین طریق رشد کرده باشد و در این مدت هیچ کدام از برگ‌های آن نریخته باشد،

الف) الان که در تیرماه هستیم، گیاه او چند برگ دارد؟

ب) تا آبان‌ماه گیاه هیوا چند برگ خواهد داشت؟

پ) این گیاه، در ماه آذر نسبت به ماه آبان چند برگ بیشتر خواهد داشت؟

ت) کدام نمودار تعداد برگ‌های این گیاه را در شش ماه اول سال نشان می‌دهد؟ (محور افقی، ماه و محور عمودی، تعداد برگ را نشان می‌دهد.)



ث) اگر رشد گیاه هیوا به همین ترتیب ادامه پیدا کند، پس از ۳۰ ماه گیاه او چند برگ خواهد داشت؟

۹۰۰ (۱) ۱۹۰۰ (۲) ۱۲۰۰۰۰۰ (۳) ۲۱۰۰۰۰۰۰۰ (۴)

مفاهیم الگویابی و دنباله‌های بازگشتی: پاسخگویی به سؤالات این آزمون، مستلزم شناسایی و تعمیم الگو برای مراحل نزدیک و دور و همچنین دستیابی به دنباله بازگشتی از طریق یافتن ارتباط بین هر جمله و جمله قبلی از دنباله است. الگویابی مراحل نزدیک در قسمت الف، الگویابی مراحل دور در قسمت ب، پ و ت و کشف دنباله بازگشتی در قسمت ث، مورد انتظار است، هرچند که ممکن است دانش‌آموز، دنباله بازگشتی موردنظر را پیش از رسیدن به قسمت ث، در پاسخ به سؤالات ب، پ و ت کشف نماید.

مفهوم آهنگ تغییر: درک مفهوم تغییر به عنوان یک مفهوم پایه‌ای برای درک مفهوم آهنگ تغییر مهم است. در سؤال پ به طور واضح میزان تغییرات تعداد برگ‌ها بین دو ماه متوالی خواسته شده است. پاسخگویی به سؤال ت نیز مستلزم تحلیل تغییرات متوالی تعداد برگ‌ها در ۶ ماه اول است؛ لذا در قسمت ت مفهوم آهنگ تغییر به طور ضمنی مورد سؤال واقع شده است.

توانایی کار کردن با اعداد بزرگ: اگرچه در سؤالات ب، پ و ت نیز تا حدودی اعداد بزرگ ظاهر می‌شوند اما در سؤال ث به درک بیشتری از اعداد بزرگ نیاز است. پاسخ به سؤال ث (که یک عدد ۱۰ رقمی است)^۱، یا بر اساس مقایسه شهودی بزرگی تعداد برگ‌ها در چند ماه آغازین است یا براساس رابطه بازگشتی (یا صریح) به دست آمده برای تعداد برگ‌هاست که مورد دوم، توانایی محاسباتی و کار با اعداد بزرگ را می‌طلبد.

پس‌آزمون: یک برگ کلم می‌تواند حدود ۱۰ میلیارد سلول داشته باشد. نوعی کپک وجود دارد که روی برگ کلم زندگی می‌کند. فرض کنید این کپک فقط یک روز عمر می‌کند و در این یک روز، فقط یک سلول از برگ کلم را می‌خورد و در پایان روز دقیقاً دو کپک دیگر تولید می‌کند.

الف) پس از ۱۵ روز چه تعدادی از سلول‌های کلم خورده شده است؟

ب) پس از چند روز برگ کلم تمام می‌شود؟

پ) این برگ کلم در روز بیستم نسبت به روز نوزدهم چند سلول کمتر دارد؟

ت) نمودار تعداد کل سلول‌های خورده شده در هر ماه را رسم کنید.

مفاهیم الگویابی و دنباله‌های بازگشتی: پاسخگویی به سؤالات این آزمون، مستلزم شناسایی و تعمیم الگو برای مراحل دور و همچنین دستیابی به دنباله بازگشتی از طریق یافتن ارتباط بین هر جمله و جمله قبلی از دنباله است. الگویابی مراحل دور در قسمت الف، ب و پ از طریق یافتن رابطه صریح یا بازگشتی بین شماره روز و تعداد سلول‌های کپک تولید شده، مورد انتظار است. با توجه به نحوه فرمول‌نویسی در اکسل، احتمال یافتن رابطه بازگشتی از یافتن رابطه صریح بیشتر است اما پس از دستیابی به دنباله بازگشتی، دنباله اعداد به دست آمده، یعنی ۱، ۳، ۷، ۱۵، ۳۱ و ... ممکن است رابطه صریح آن، یعنی $2^n - 1$ ، را نیز به ذهن متبادر نماید. اگر چه انتظار می‌رود، پس از دوره آموزشی شرکت‌کنندگان بتوانند با اکسل فرمول‌نویسی کرده و جدول و نمودار مربوط به موقعیت پس‌آزمون را به دست آورند، اما بدون این کار نیز می‌توانند با کشیدن جدول نظام‌دار، دنباله نظیر به تعداد کل سلول‌های خورده شده را با محاسبه دستی یا با ماشین حساب بیابند و به سؤالات پاسخ دهند.

	A	B	C	D	E
1	شماره روز	تعداد سلول کپک در هر روز	تعداد سلول خورده شده در هر روز	تعداد کل سلول خورده شده	سلول‌های باقی‌مانده
2	1	1	1	1	999999999
3	2	2	2	3	999999997
4	3	4	4	=C4+D3	999999993
5	4	8	8	15	999999985
6	5	16	16	31	999999969
7	6	32	32	63	999999937
8	7	64	64	127	999999873

شکل ۵. نمونه‌ای از مدل‌سازی عددی در اکسل برای سؤالات پس‌آزمون

۱. این پاسخ که امری غیرممکن در شرایط واقعی است، می‌تواند باعث برانگیختن توجه دانش‌آموزان به عامل ظرفیت تحمل محیط شود.

مفهوم آهنگ تغییر: سؤال پ به‌طور واضح میزان تغییرات تعداد سلول‌های باقی‌مانده را بین دو روز متوالی مد نظر دارد. همچنین، در سؤال ت، رسم نمودار در برگه پس‌آزمون نیازمند درک مفهوم آهنگ تغییر است. انتظار می‌رود شرکت‌کنندگان در پس‌آزمون نمودارشان را در اکسل رسم کنند و سپس آن را در برگه خود رسم نمایند.

توانایی کار کردن با اعداد بزرگ با استفاده از اکسل: همه سؤالات پس‌آزمون، نیازمند دقت در وارد کردن اعداد در اکسل، دقت در محاسبات و دقت در رسم نمودار در برگه پس‌آزمون است؛ لذا، سؤالات پس‌آزمون درک از اعداد بزرگ و توانایی کار با آنها را می‌سنجد.

ملاحظات درباره مقایسه پیش‌آزمون و پس‌آزمون: همان‌طور که دیده می‌شود، موقعیت‌های سؤالات پیش‌آزمون و پس‌آزمون مشابه هستند تا بتوانند اثر مداخله آموزشی را نشان دهند، با این حال، با توجه به آموزش و استفاده از نرم‌افزار اکسل در دوره آموزشی این پژوهش، سؤالات پس‌آزمون در چند مورد تفاوت‌هایی با سؤالات پس‌آزمون دارد که عبارتند از:

- سؤال الف در پیش‌آزمون (الگویابی برای یک مرحله نزدیک) صرفاً به‌عنوان یک سؤال مقدماتی برای ورود تدریجی دانش‌آموزان به فضای آزمون در نظر گرفته شد و نظیری برای آن در پس‌آزمون وجود ندارد؛ از این رو در تحلیل‌های آماری نیز در نظر گرفته نمی‌شود.
- در سؤالات پس‌آزمون عامل طول عمر کپک‌ها ذکر گردید، در حالی که در پیش‌آزمون فرض بر آن بود که برگ درختان نمی‌ریزند. لذا مسئله از این جنبه کمی پیچیده‌تر شده است.
- در پس‌آزمون، علاوه بر پاسخ‌های مکتوب، فایل اکسل ترسیم جداول و نمودارها خواسته شد، اما در پیش‌آزمون تنها امکان استفاده از ماشین‌حساب فراهم بود و به همین دلیل دو سؤال پایانی پیش‌آزمون به‌صورت چهارگزینه‌ای طراحی شد.

روش تحلیل پیش‌آزمون و پس‌آزمون

تحلیل داده‌ها به‌صورت کمی از طریق نمره‌دهی دودویی (درست/نادرست) انجام شد. با این حال با توجه به ماهیت مفهومی سؤالات، لازم بود پاسخ‌ها بر اساس استدلال‌های مکتوب شده در برگه‌های پیش‌آزمون و پس‌آزمون و همچنین فایل اکسل ارائه شده برای پس‌آزمون تفسیر گردند. از این رو، توافق میان محققان به منظور افزایش پایایی نمره‌دهی ضروری بود (Creswell, 2014). به این منظور ابتدا دو نفر از محققان پاسخ‌های دانش‌آموزان را به‌طور مستقل بررسی کردند تا برداشت‌های اولیه از درستی یا نادرستی پاسخ‌ها مشخص شود. سپس، بر اساس این بررسی اولیه، معیارهای مشخصی را برای تشخیص پاسخ‌های درست و نادرست تعیین کرده و بر سر آن‌ها به توافق رسیدند. لازم به ذکر است در تعیین این معیارها، رویکردی کل‌گرایانه نیز اتخاذ شد؛ بدین معنا که پاسخ هر سؤال در بستر کلی پاسخ‌های دانش‌آموز به سایر سؤالات مرتبط تفسیر گردید. این رویکرد با هدف افزایش روایی قضاوت درباره میزان درک دانش‌آموزان از مفاهیم مورد مطالعه و پرهیز از ارزیابی‌های جزئی و منفک به کار گرفته شد.

پاسخ‌های دانش‌آموزان بر اساس معیارهای توافق‌شده، بررسی شد و برای هر سؤال، نمره صفر به‌عنوان پاسخ نادرست و نمره یک به‌عنوان پاسخ درست در نظر گرفته شد. در نهایت، به منظور ارزیابی تأثیر مداخله آموزشی، طبق جدول ۲، میانگین نمرات سؤالات مرتبط با هر یک از متغیرهای پژوهش محاسبه شد:



جدول ۲. سؤالات پیش‌آزمون و پس‌آزمون مرتبط با هر یک از متغیرهای پژوهش

متغیر پژوهش	سؤالات پیش‌آزمون مرتبط	سؤالات پس‌آزمون مرتبط
درک از الگوها و دنباله‌های بازگشتی	ب، پ، ت و ث	الف، ب، پ و ت
درک مفهوم آهنگ تغییر	ب، پ، ت و ث	پ و ت
درک اعداد بزرگ و توانایی کار کردن با آنها	ب، پ، ت و ث	الف، ب، پ و ت

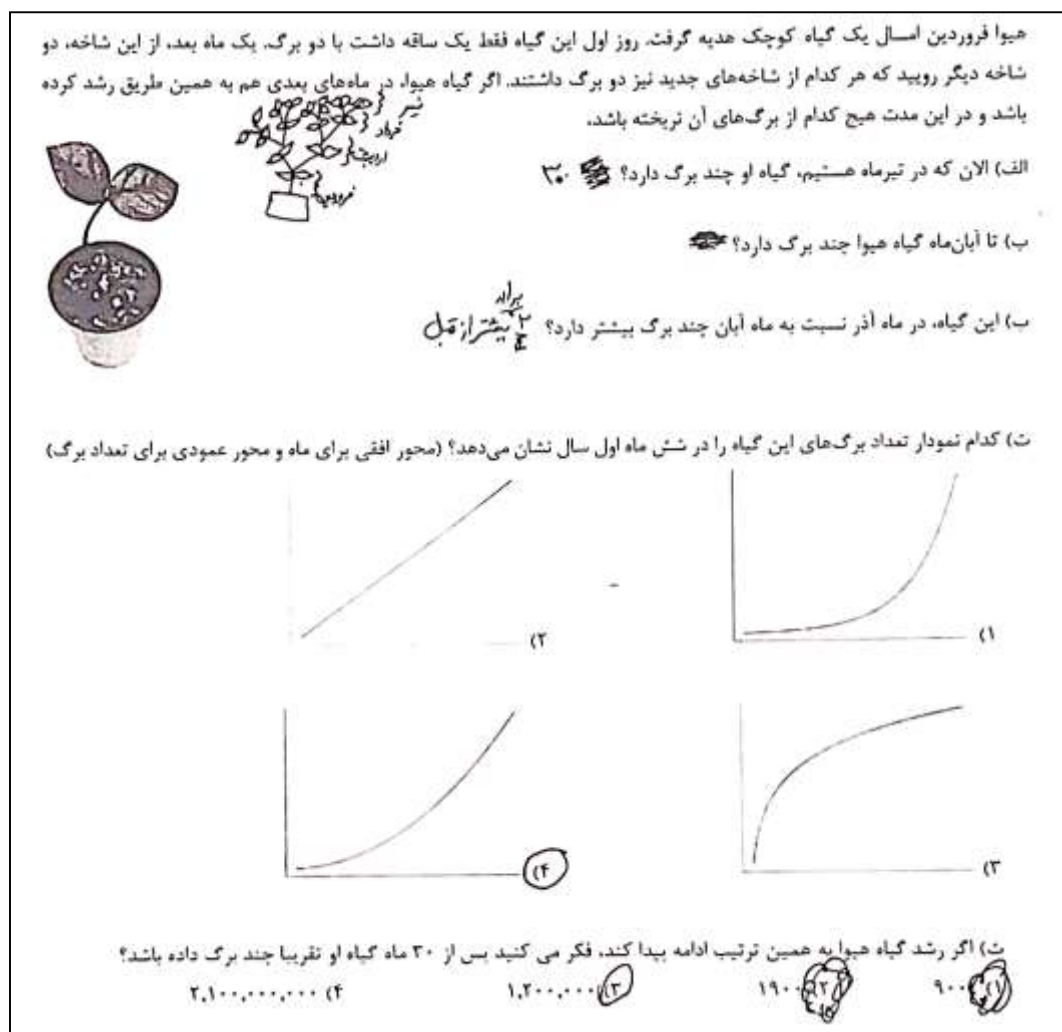
نتیجه‌گیری:

داده‌های این پژوهش از دو نوبت برگزاری دوره در خانه ریاضیات اصفهان و شهر علم زنجان در تابستان ۱۴۰۲ به دست آمده‌اند. در ادامه نحوه تحلیل و کدگذاری این داده بیان می‌شود.

تحلیل و کدگذاری دودویی پاسخ‌های دانش‌آموزان در پیش‌آزمون: در میان پاسخ‌های دانش‌آموزان سه برداشت مختلف از صورت مسئله دیده می‌شود که بر اساس محاسبات یا روابط جبری مکتوب یا شکل‌های رسم شده برای قسمت الف، قابل تشخیص بوده است:

- هر شاخه گیاه تنها یک‌بار دو برگ تولید کرده و سپس به دو شاخه دیگر تقسیم می‌شود؛ پس از آن، همان شاخه ثابت می‌ماند و برگ‌دهی در شاخه‌های جدید ادامه می‌یابد. این برداشت از مسئله با رابطه $2 \times (2^n - 1)$ یا $2^{n+1} - 2$ صورتبندی می‌شود. ۱۶ مورد از پاسخ‌ها بر مبنای این برداشت بوده است.
- هر شاخه فقط دو برگ دارد ولی در هر ماه می‌تواند مجدداً به دو شاخه دیگر تقسیم شود که بر اساس رابطه $2 \times 3^{n-1}$ بیان می‌شود. در ۵ مورد، براساس این برداشت به سؤال الف، پاسخ داده شده است.
- در هر ماه به جای کل برگ‌ها فقط برگ‌های جدید گیاه شمرده شده است که بر اساس رابطه 2^{n+1} بیان می‌شود. ۴ مورد از پاسخ‌ها بر اساس این برداشت بوده است.

از آنجا که این برداشت‌های متفاوت ناشی از ماهیت این مسئله (مدلسازی) بوده و ارتباط مستقیمی با اهداف سنجش پیش‌آزمون (شامل درک از الگوها و دنباله‌های بازگشتی، فهم آهنگ تغییر و کارکردن با اعداد بزرگ) نداشت، تمامی پاسخ‌های صحیح حاصل از این برداشت‌ها به‌عنوان پاسخ درست در نظر گرفته شدند. با این حال، اغلب دانش‌آموزان، فارغ از نوع برداشتشان، تنها در پاسخ به سؤال اول موفق بوده‌اند. در شکل ۵، پاسخ یک دانش‌آموز دختر زنجان پایه نهم از مدرسه دولتی به سؤالات پیش‌آزمون را نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود، این دانش‌آموز موفق شده است بر اساس برداشت نوع ۱ و یافتن ارتباط بین دو جمله متوالی از دنباله، به سؤالات الف و پ پاسخ دهد، اما به دلیل ناتوانی در یافتن دنباله بازگشتی یا صریح از دستیابی به پاسخ صحیح در قسمت‌های ب، ت و ث بازمانده است.



شکل ۶: پاسخ یک دانش‌آموز پایه نهم به سؤالات پیش‌آزمون

در مورد پاسخ‌های نادرست، در سه مورد دانش‌آموزان از تصاعد حسابی $4n-2$ و در یک مورد از رابطه درجه دو $2n^2$ برای حل مسئله استفاده کرده‌اند. این پاسخ‌ها با توجه به عدم درک ماهیت سؤال، نادرست در نظر گرفته شدند. پاسخ‌های نادرست دیگر برای قسمت الف که از رابطه خاصی پیروی نمی‌کردند، ۲۲، ۳۶ و ۳۸ (از هر کدام یک مورد) بودند. در یک مورد نیز پاسخی به این سؤال داده نشده بود. این پاسخ‌های نادرست به سؤال الف، منجر به پاسخ‌های نادرست برای سؤالات ب و پ نیز می‌گردید.

همان‌طور که پیش‌تر بیان شد، در فرایند نمره‌دهی، رویکردی کل‌گرایانه اتخاذ شد؛ بدین معنا که پاسخ‌های هر دانش‌آموز در ارتباط با یکدیگر تحلیل گردید. این امر به ویژه در بررسی پاسخ‌ها به قسمت ث اهمیت بیشتری یافت (در ادامه به آن اشاره خواهد شد).

در نهایت پس از نمره‌دهی پاسخ‌ها به سؤالات پیش‌آزمون، مشاهده شد تعداد پاسخ‌های درست به سؤالات الف، ب، پ، ت و ث به ترتیب برابر با ۲۶، ۱۵، ۱۴، ۱۲ و ۱۵ بوده است. بنابراین، ۷۹٪ دانش‌آموزان در حل سؤال الگویابی الف (مربوط به مراحل نزدیک) موفق بوده‌اند. این موفقیت به این دلیل است که سؤال الف تنها نیازمند شناسایی الگو در مراحل ابتدایی بود و دانش‌آموزان توانستند با رسم شکل یا جدول، جملات آغازین الگو را به‌سادگی بیانند. در مقابل، سؤالات بعدی مستلزم



درک عمیق‌تری از ساختار الگو، توانایی استخراج رابطه بازگشتی یا صریح برای دنباله و نیز درک بصری از آهنگ تغییر نمودار توابع بودند. بنابراین همان طور که دیده می‌شود میزان موفقیت دانش‌آموزان در سؤالات ب، پ، ت و ث، کمتر از نصف و به ترتیب، ۴۵٪، ۴۲٪، ۳۶٪ و ۴۵٪ بوده است.

در ادامه به‌طور خاص ارتباط فراوانی پاسخ‌های درست سؤالات ت و ث، با سایر سؤالات نیز ارائه می‌گردد:

- از ۱۲ مورد پاسخ درست به سؤال ت، ۶ مورد از آنها در پاسخ سؤالات ب و پ موفق نبوده‌اند.
- از ۱۵ مورد پاسخ درست به سؤال ث، ۶ مورد از آنها به سؤال ت پاسخ درست داده‌اند.
- در ۴ مورد، پاسخ سؤالات ت و ث درست و پاسخ سؤالات ب و پ نادرست بوده است.

با توجه به نتایج به‌دست‌آمده و با درنظر داشتن این که پاسخگویی به سؤالات ت و ث نیازمند درک عمیق‌تری نسبت به سؤالات ب و پ دارند، گمان می‌رود در برخی موارد پاسخ‌های درست به سؤالات چهارگزینه‌ای ممکن است ناشی از انتخاب تصادفی گزینه‌ها باشد. البته این امر، در هنگام طراحی سؤالات پیش‌آزمون برای محققان مبرهن بود با این حال به دلایل زیر تصمیم گرفته شد دو سؤال آخر به صورت چهارگزینه‌ای طراحی شوند:

- در سؤال ت، صرفاً درک دانش‌آموزان از آهنگ تغییر در نمایش نموداری مورد نظر بوده است و نه توانایی آنها در رسم نمودار؛ چرا که حتی دانش‌آموزان پایه نهم نیز رسم نمودارهای توابع غیرخطی را آموزش ندیده‌اند و دانش‌آموزان پایه دهم نیز فقط با رسم نمودارهای خطی و درجه ۲ آشنا هستند.
- در سؤال ث، درک دانش‌آموزان از اعداد بزرگ در یک دنباله نمایی (که مستلزم درک از آهنگ تغییر نیز است) مورد نظر بوده و نه یافتن رابطه صریح دنباله. بنابراین کافی بود دانش‌آموزان ۱۰ جمله اول الگو را به دست آورده و با توجه به تغییرات هر دو جمله متوالی، گزینه‌های نادرست الف و ب را حذف کنند. سپس با تحلیل نتیجه به دست آمده، تخمینی از تعداد ارقام تعداد برگ‌ها برای ۳۰ ماه به دست آورند.

تحلیل و کدگذاری دودویی پاسخ‌های دانش‌آموزان در پس‌آزمون: در پس‌آزمون تعداد پاسخ‌های کاملاً درست ۱۷ مورد بوده است. با این حال، با بررسی پاسخ‌های مکتوب یا فایل‌های اکسل پیوست شده، محققان دریافتند برخی از پاسخ‌ها، ناشی از بی‌دقتی‌های سهوی دانش‌آموزان است. از آنجا که این بی‌دقتی‌ها ارتباطی با درک دانش‌آموزان از مفاهیم مورد نظر پژوهش نداشتند، محققان این نوع از پاسخ‌ها را نیز درست درنظر گرفتند که عبارتند از:

- در ۸ مورد برای پاسخ به سؤال الف، خطای سهوی در جابه‌جا خواندن شماره سطرهای جدول و شماره سطرهای صفحه اکسل وجود داشت (به جای ۳۲۷۶۷، سطر بالایی یعنی ۱۶۳۸۳ ارائه شده است)،
- در ۹ مورد برای پاسخ به سؤال ب، خطای حاصل از شمارش ارقام عدد رخ داده بود (به نادرستی یک میلیارد به جای ده میلیارد تشخیص داده شده است)،
- در ۲ مورد نیز هنگام فرمول‌نویسی با اکسل، یک سلول نادرست انتخاب شده بود اما بقیه فرایند مدلسازی با اکسل درست بود.
- در ۱ مورد، سلول‌های کلم خورده شده به جای سلول‌های باقی‌مانده از کلم محاسبه شده بود و بر اساس این فرض مدل‌سازی عددی با اکسل برای تمام سؤالات با موفقیت انجام شده بود.

- در ۱ مورد، طول عمر یک روزه کپک‌ها در نظر نگرفته شده بود اما بر مبنای این فرض نادرست، مدل‌سازی عددی با اکسل برای تمام سؤالات با موفقیت انجام شده بود.

در مواردی که پاسخ‌های داده شده به یک سؤال با سایر پاسخ‌های داده شده هماهنگ نبود و از بررسی پیش‌نویس‌ها و فایل اکسل هم دلیل موجهی برای پاسخ‌های ارائه شده به دست نیامد، این پاسخ‌ها نادرست در نظر گرفته شده است. همچنین در مواردی مشاهده شد که الگوی درستی برای پاسخ به سؤال تشخیص داده شده اما از اکسل برای حل سؤال استفاده نشده بود، لذا حل قسمت‌هایی از سؤال که نیازمند کار کردن با اعداد بزرگ بوده، با موفقیت انجام نشده است.

مقایسه آماری پیش‌آزمون و پس‌آزمون: به منظور مقایسه اثر دوره آموزشی از مقایسه میانگین نمرات در پیش‌آزمون و پس‌آزمون استفاده شده است. چون مقدار سطح معناداری در اختلاف نمرات جفت شده در پیش‌آزمون و پس‌آزمون برای هر یک از متغیرها کمتر از ۰,۰۵ می‌باشد ($P < 0.05$) لذا فرض نرمال بودن داده‌ها برای هیچ یک از متغیرها برقرار نیست. از این رو به منظور بررسی مقایسه میانگین نمرات در پیش‌آزمون و پس‌آزمون از آزمون ناپارامتری ویلکاکسون استفاده شده است. نتایج این آزمون نشان می‌دهد که چون مقدار سطح معناداری از ۰,۰۵ کمتر است ($Z = -7.19$ و $P < 0.05$)، لذا فرض صفر مبنی بر برابری میانگین پیش‌آزمون و پس‌آزمون رد می‌شود به بیان دیگر مقدار میانگین پیش‌آزمون و پس‌آزمون متفاوت است.

جدول ۳: مقدار میانگین نمرات در پیش‌آزمون و پس‌آزمون

متغیر	میانگین نمرات پیش‌آزمون	میانگین نمرات پس‌آزمون
درک الگویابی و دنباله‌های بازگشتی	۰/۴۲	۰/۷۹
درک آهنگ تغییر	۰/۴۱	۰/۷۷
درک اعداد بزرگ و کار کردن با آنها	۰/۴۲	۰/۷۹

در انتها، با توجه تنوع جمعیت‌شناسی شرکت‌کنندگان در این پژوهش، چند نتیجه جانبی که در ضمن این تحقیق به دست آمده است، گزارش می‌شود:

- فقط ۵ نفر از ۳۳ نفر (یعنی ۱۸/۱٪) به‌طور کامل به سؤالات پیش‌آزمون پاسخ صحیح داده‌اند اما در مرحله پس‌آزمون این تعداد به ۲۳ نفر (یعنی ۶۹/۴٪) می‌رسد.
- میانگین کل نمرات پیش‌آزمون و پس‌آزمون به ترتیب و بسته به نوع مدرسه دانش‌آموزان چنین است: مدارس عادی (۰/۳۷ و ۰/۷۴) و مدارس تیزهوشان (۰/۷۵ و ۰/۹۳).
- میانگین کل نمرات پیش‌آزمون و پس‌آزمون بر اساس پایه تحصیلی دانش‌آموزان به ترتیب چنین بوده است: پایه نهم (۰/۴۱ و ۰/۶۳)، پایه دهم (۰/۴۳ و ۰/۸۳) و پایه یازدهم (۰/۴۵ و ۰/۹۵) که نشانگر افزایش میانگین نمرات پس‌آزمون نسبت به پیش‌آزمون است.
- میانگین کل نمرات پیش‌آزمون و پس‌آزمون بر اساس تجربه دانش‌آموزان در حل مسائل مدل‌سازی به ترتیب چنین بوده است: ناآشنا با مسائل مدل‌سازی (۰/۲۹ و ۰/۷۳) و آشنا با مسائل مدل‌سازی (۰/۷۳ و ۰/۹۶) که گروه دوم، همان دانش‌آموزان برگزیده مسابقه مدل‌سازی ایلیمپاد خانه ریاضیات اصفهان بوده‌اند.



بحث و نتیجه‌گیری

به دلیل ماهیت ریاضی، درک مفاهیم ریاضی در سطوح بالاتر، نیازمند درک مفاهیم پایه‌ای‌تر آن است. لذا، دانش‌آموزانی که در فهم مفاهیم پایه‌ای دچار ضعف هستند، علاقه، انگیزه و اعتماد به نفس لازم را برای یادگیری مفاهیم جدید نخواهند داشت. در این بین، به کارگیری تکنولوژی در آموزش ریاضی به ویژه برای دانش‌آموزان این نسل که زندگی آنها با تکنولوژی گره خورده است، می‌تواند علاقه، انگیزه و اعتماد به نفس بیشتری ایجاد کند و اگر این امر در مسائلی به کار گرفته شود که کاربردها و زیبایی‌های ریاضی را در زندگی روزمره و دیگر علوم نشان می‌دهند تأثیر آن دوچندان خواهد شد (ترابی، رحیمی پیرانفر، تقی‌دستجردی و اشتری، ۱۴۰۳). بر این اساس، محققین برای ایجاد درکی عمیق‌تر از چند مفهوم ریاضی در دانش‌آموزان متوسطه از یک مسئله مدل‌سازی بهره گرفتند و برای حل آن از نرم‌افزار اکسل که دارای امکانات محاسباتی و بصری است، استفاده نمودند.

شرکت‌کنندگان در این پژوهش که ۳۳ دانش‌آموز از پایه‌های نهم تا یازدهم بودند با کمک نرم‌افزار اکسل، مدل‌های مختلف برای مسئله رشد جمعیت خرگوش‌ها را به دست آوردند و از این طریق با مفهیمی چون الگوها و دنباله‌های بازگشتی، آهنگ تغییر و اعداد بزرگ درگیر شدند. نتایج عملکرد این دانش‌آموزان در پیش‌آزمون و پس‌آزمون بیانگر آن است که شرکت در این دوره توانسته است بر درک دانش‌آموزان از الگوها و دنباله‌های بازگشتی، آهنگ تغییر و اعداد بزرگ و کار با آنها، تأثیری مثبت بگذارد. با این حال، میزان موفقیت دانش‌آموزان مختلف، به یک اندازه نبوده و برخی از تفاوت‌های آنها قابل تأمل است:

- میزان موفقیت دانش‌آموزان مدارس عادی در سؤالات پس‌آزمون نسبت به سؤالات پیش‌آزمون، تقریباً دوبرابر شده است (از ۰/۳۷ به ۰/۷۴ رسیده است). دانش‌آموزان مدارس تیزهوشان که نقطه شروع‌شان (با میانگین نمره ۰/۷۵ در پیش‌آزمون) تقریباً برابر با میانگین نمرات دانش‌آموزان مدارس عادی در پیش‌آزمون بوده است نیز توانسته‌اند موفقیت خود را در پس‌آزمون به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش دهند (نمره پس‌آزمون ۰/۹۳). از این رو، مداخله آموزشی بر هر دو گروه تأثیر مثبت داشته است.

- میانگین نمرات پیش‌آزمون در پایه‌های مختلف روند صعودی دارند اما تفاوتشان قابل توجه نیست (پایه نهم ۰/۴۱، پایه دهم ۰/۴۳ و پایه یازدهم ۰/۴۵). در مقابل، میانگین نمرات پس‌آزمون نشان می‌دهد که تأثیر این دوره در پایه‌های بالاتر چشمگیرتر بوده است (پایه نهم ۰/۶۳، پایه دهم ۰/۸۳ و پایه یازدهم ۰/۹۵). به عبارتی اختلاف میانگین نمرات پیش‌آزمون و پس‌آزمون در پایه نهم ۰/۲۲، در پایه دهم ۰/۴۰ و در پایه یازدهم، ۰/۵۰ بوده است. از عوامل محتمل برای این افزایش چشمگیر، تجربه و مهارت بیشتر دانش‌آموزان پایه‌های بالاتر در کار با مفاهیم ریاضی و استفاده از اکسل و آمادگی شناختی بیشتر آنها برای حل مسائل پیچیده‌تر است. با این حال، داده‌ها به تنهایی نمی‌توانند این علت را اثبات کنند و این امر نیاز به بررسی‌های دقیق‌تر دارد.

- میانگین نمرات برای دانش‌آموزان آشنا با مسائل مدل‌سازی به طور چشمگیری نسبت به دانش‌آموزان ناآشنا با مسائل مدل‌سازی تفاوت دارد: در گروه اول (۰/۷۳ و ۰/۹۶) و در گروه دوم (۰/۲۹ و ۰/۷۳). بنابراین به نظر می‌رسد، آشنایی دانش‌آموزان با این نوع از مسائل، آنها را در نقطه شروع بسیار بالاتری نسبت به گروه همسالان خود قرار داده است. این برتری اولیه احتمالاً عاملی برای موفقیت قابل توجه آنها در پس‌آزمون نیز شده است. بر این اساس به نظر می‌رسد زمینه‌های یادگیری مانند مسائل مدل‌سازی هنگامی که با بهره‌گیری از ابزارهایی مانند اکسل توأم گردند، احتمالاً بسترهای مناسبی برای درک عمیق‌تر دانش‌آموزان از مفاهیم موردنظر در این پژوهش هستند. با این حال، داده‌های حاصل از این

پژوهش نمی‌تواند به تنهایی شاهی بر این مدعا باشند و تعمیم این نتایج مستلزم انجام پژوهش‌های بیشتر با نمونه‌های گسترده‌تر و طراحی‌های آزمایشی کنترل‌شده‌تر است.

این پژوهش همانند هر مطالعه آزمایشی، دارای محدودیت‌هایی است که باید مورد توجه قرار گیرد. یکی از محدودیت‌های مهم این پژوهش مربوط به ویژگی‌های جمعیت‌شناختی و دیگری شرایط اجرای دوره است. اطلاعات شرکت‌کنندگان (که از طریق نمونه‌گیری در دسترس انتخاب شدند) نشان‌دهنده تفاوت‌هایی از نظر جنسیت، سن، رشته تحصیلی و نوع مدرسه و همچنین میزان آشنایی آنها با مسائل مدل‌سازی است که در چارچوب یک مطالعه آزمایشی کمی می‌تواند به عنوان محدودیت پژوهش تلقی شود، زیرا کنترل کامل متغیرهای مداخله‌گر را سخت می‌کند. علاوه بر این، نتایج به دست آمده ممکن است تحت تأثیر شرایط خاص برگزاری دوره از جمله زمان برگزاری (تعطیلات تابستان)، مکان اجرا (خانه ریاضیات اصفهان و خانه علم زنجان) و شیوه برگزاری دوره (به صورت مختلط و با حضور سه مدرس) قرار گرفته باشد. بنابراین، پیشنهاد می‌شود مطالعات آینده با کنترل متغیرهای شرایط اجرا و انتخاب نمونه‌های همگن‌تر، به بررسی تأثیر آموزش مبتنی بر مدل‌سازی با استفاده از نرم‌افزار اکسل انجام گیرد.

References

- Ahmadpour, F., Fadaei, M. R., & Rafiepour, A. (2011). Modeling: A way to bring the real world into the classroom. In *Proceedings of the First National Conference on Fundamental Transformation in Iran's Curriculum System* (pp. 516–521). Mashhad, Iran. [in Persian]
- Ahmadpour, F., Taghidastjerdi, S., Rafiepour, A., Sadeghi, Z., Taheri, M., & Gharaati, E. (2023). *Reality-based mathematics problems* (Vol. 2). Tehran: Fatemi Publishing. [in Persian]
- Ary, D., Jacobs, L. C., & Razavieh, A. (2001). *Introduction to research in education* (V. Sarkisian, M. Nikoo, & E. Saeedian, Trans.). Tehran: Soroush. [in Persian]
- Baker, J., & Sugden, S. J. (2004). Spreadsheets in education—The first 25 years. *Spreadsheets in Education*, 1(1) 24–40.
- Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Van Auken Borrow, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(5), 503–532.
- Berger, E., & Starbird, M. (2017). Five elements of effective thinking (M. A. Jafari, Trans.; 2nd ed.). Tehran: Qoqnoos Publishing.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352–378.
- Confrey, J., & Maloney, A. (2007). A theory of mathematical modelling in technological settings. In *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI Study* (pp. 57–68). Boston, MA: Springer US.
- Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 135–164.
- Creswell, J. W. (2014). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*. Sag
- Dehghani, M., & Purasfahani, V. (2025). Extracurricular activities as a communication link for quality education in multicultural classrooms: A phenomenological study in elementary school. *Journal of Curriculum Studies*, 20(77), 37–76. [in Persian]
- Dick, T. P., & Hollebrands, K. F. (2011). Focus in high school mathematics: Technology to support reasoning and sense making (pp. xi–xvii). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.

- Freudenthal, H. (1982). Research problems in mathematics education from Freudenthal's perspective (Z. Gouya, Trans.). *Roshd Journal of Mathematics Education*, 65, 5–11. [in Persian]
- Greer, B., & Mukhopadhyay, S. (2012). The hegemony of mathematics. In *Opening the cage* (pp. 227–248). Brill.
- Healy, L., & Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 65–83.
- Hoyles, C., & Noss, R. (2003). *What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education?* Second International Handbook of Mathematics Education
- Khosroshahi, L., & Asghari, A. (2016). Suitable contexts for algebra in elementary education: An analysis of Iranian textbooks based on a proposed framework. *Journal of Educational Innovations*, 15(3), 147–170. [in Persian]
- Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus. *Mathematics Teacher*, 87, 32–36.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 65–86.
- Mitchell, M. (2021). Complexity: A guided tour (R. Amirhimi, Trans.). Tehran: Nashr-e No. [in Persian]
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Curriculum Development Secretariat. (2010). *Curriculum of the Islamic Republic of Iran: Comprehensive plan for fundamental transformation of curricula (Fourth draft)*. Tehran: Organization for Research and Educational Planning. [in Persian]
- National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: Author.
- Parhizgar, Z., Alemolhodaei, H., & Jabbari Noqabi, M. (2017). The capacity of modeling problems to change students' attitudes toward mathematics. *Theory and Practice in Curriculum Journal*, 5(9), 167–192. [in Persian]
- Parhizgar, Z., Jabbari Noqabi, M., & Alemolhodaei, H. (2020). The effect of teaching mathematical modeling problems on students' joyful experiences. *Journal of Educational Innovations*, 19(73), 127–146. [in Persian]
- Pierce, R., & Stacey, K. (2006). Enhancing the image of mathematics by association with simple pleasures from real world contexts. *ZDM*, 38(3), 214–225.
- Pollak, H. (2007). Mathematical modelling—A conversation with Henry Pollak. In *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI Study* (pp. 109–120). Boston, MA: Springer US.
- Rafiepour, A. (2014). Modeling and applications: A research report. *Theory and Practice in Curriculum Journal*, 3, 93–116. [in Persian]
- Rafiepour, A., & Molayi, R. (2020). Content analysis of Iranian secondary mathematics textbooks based on a modeling approach. *Research in Mathematics Education*, 1(1), 29–44. [in Persian]
- Rafiepour, A., & Rahmani, M. (2021). The role of problem posing in Iranian mathematics textbooks. *Theory and Practice in Curriculum Journal*, 17, 91–118. [in Persian]
- Rivera, F. D. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics*. New York, NY: Springer.
- Sandefur, J., & Manaster, A. B. (2022). Encouraging research on recursive thinking through the lens of a model of the spread of contagious diseases. *ZDM – Mathematics Education*, 54(4), 895–907.
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2019). Researching and using progressions (trajectories) in mathematics education. In *Global Education in the 21st Century* (Vol. 3). Springer.
- Secretariat of the Supreme Council of Education. (2012). *Curriculum of the Islamic Republic of Iran, resolution of Esfand 2012*. Tehran: Supreme Council of Education in collaboration with the Organization for Educational Research and Planning. [in Persian]
- Shayan, M., & Yafitayan, N. (2022). Evaluating the performance of ninth grade students in the math literacy test with emphasis on math textbooks. *Journal of Curriculum Studies*, 17(66), 41–74. [in Persian]
- Supreme Council for Education Secretariat. (2012). *Curriculum of the Islamic Republic of Iran: Resolution of March 2012*. Tehran: Supreme Council for Education in collaboration with the Organization for Research and Educational Planning. [in Persian]
- Sweller, J. (1998). Cognitive load during problem solving. *Cognitive Science*, 12, 257–285.
- Torabi, P., Rahimi Piranfar, M., Taghidastjerdi, S., & Ashtari, A. (2024). The impact of STEM education on motivation, interest, and self-confidence in solving mathematical modeling problems using Excel. In

Proceedings of the 19th National Conference on Mathematics Education in Iran. Isfahan, Iran. [in Persian]

Yousefi Hamidi, S., Salimi, L., & Fallah, V. (2025). Designing a curriculum model for economic education based on entrepreneurship for lower secondary school. *Journal of Curriculum Studies*, 20(77), 1–36. [in Persian]

Yousefi, M., Zanganeh, H., Pourjamshidi, M., & Shojae, S. (2025). The role of extended reality (virtual, augmented, and mixed) in the curriculum of students with dyscalculia, dyslexia, and dysgraphia: A systematic review. *Journal of Curriculum Studies*, 19 (75), 53–84. [in Persian]