فصلنامه مطالعات برنامه درسی ایران
سال نوزدهم، شماره ۷۵، زمستان ۱۴۰۳، ۲۸۴ – ۲۵۷

Journal of Curriculum Studies (J. C. S)
Vol. 19 (75); 2025, 257-284
10.22034/jcs.2024.481260.2343

سطوح ادراک دانش‌آموزان از مثال نقض

Levels of Students' Understanding of Counterexample

تاریخ دریافت مقاله: ۱۰ /۱۴۰۳/۰۷؛ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۱ /۱۴۰۳/۱۰

فاطمه احمدپور[۱]

F. Ahmadpour (Ph.D)

چکیده: از لحاظ منطقی یافتن یک مثال نقض می‌تواند نادرستی یک گزاره ریاضی را نشان دهد، اما از دید دانش‌آموزان لزوماً این‌گونه نیست. تشخیص و درک یک مثال نقض نیازمند مهارت و تسلط است. هدف این مطالعه بررسی سطوح درک دانش‌آموزان از مثال نقض است. پژوهش به روش پدیدارنگاری و با تحلیل مصاحبه‌های مسئله‌محور از ۲۶ دانش‌آموز پایه هشتم انجام شد. گزارش حاضر نتایج مواجهه دانش‌آموزان با یک مثال نقض را با جزئیات بیان می‌کند و یک طبقه‌بندی از عملکردها و واکنش‌های دانش‌آموزان پیشنهاد می‌دهد که سطوح آن لزوماً سلسله‌مراتبی نیستند. این طبقه‌بندی روند دقیق‌تری از امکان پیشرفت دانش‌آموزان را از درک ماهیت و نقش مثال نقض روشن می‌کند. ضمناً نمونه‌هایی را از کار دانش‌آموزان در مورد قدرت اقناع‌کنندگی مثال نقض برای آن‌ها تا درجه توضیح‌دهندگی مثال‌ها ارائه می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: مثال نقض، اثبات، ابطال، پایه هشتم، پدیدارنگاری.

Abstract: From a logical point of view, finding a counterexample can disprove a mathematical proposition, but from students' point of view, this is not necessarily the case. Recognizing and understanding a counterexample requires skill and mastery. This study aimed to investigate the levels of students' understanding of counterexample. The research was conducted by phenomenology method and analyzing problem-based interviews of 26 eighth grade students. This report details the results of students’ encounter to a counterexample and suggests a taxonomy of student performances and reactions whose levels are not necessarily hierarchical. This categorization sheds light on a more detailed process of how students can progress from understanding the nature and role of the counterexample. It also provides instances of students' work on the convincing power of the counterexample for them to the degree of explanation of the examples.

Keywords: counterexample, proof, refutation, eighth grade, phenomenography

۱. استادیار گروه ریاضی دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران
f.ahmadpour.86@gmail.com

مقدمه

تولید مثال‌ها و تأمل در مورد آن‌ها محرک‌های قدرتمندی برای برانگیختن رویدادهای یادگیری فراهم می‌کند (Dahlberg & Housman, 1997). اما «اگر فردی در زمینه محدودی کار کند که در آن همه مثال‌های در نظر گرفته شده دارای ویژگی خاصی باشند، در صورت عدم وجود مثال‌های نقض، ذهن فرض می‌کند ویژگی‌های معلوم این زمینه تلویحاً در زمینه‌های دیگر نیز برقرار خواهند بود» (Tall, 1986, as cited in Tall, 1991, p. 10). تال این گزاره را اصل توسیع عام[1] می‌نامد که بر اهمیت وجود مثال‌های نقض تأکید دارد. همچنین Watson & Mason (2005) جستجوی عامدانه برای یافتن مثال‌های نقض را روشی واضح برای درک عمیق‌تر حدس‌ها و ویژگی‌ها در نظر می‌گیرند؛ آن‌ها تصریح می‌کنند چنین جستجویی می‌تواند در فضای مثال[2] فعلی باشد یا می‌تواند موجب توسیع آن شود (cited in Klymchuk, 2012).

اگر به یادگیرندگان فرصت بررسی فضاهای مثالشان داده شود، اشکالات و تناقضات ساختار فکری آن‌ها آشکار می‌شود. مثلاً وقتی شاگردان در کلاس درباره ایده‌های ریاضی‌شان بحث کنند و حدس‌هایی را مطرح کنند، فرصتی فراهم می‌شود که دیگر شاگردان و معلم حدس‌های آن‌ها را ارزیابی کنند و در صورت لزوم مثال‌های نقضی ارائه کنند. افرادی هستند که یک مثال نقض را به‌عنوان رد یک حدس نمی‌پذیرند. در این باره Selden & Selden (1998) توضیح داده‌اند که این امر زمانی اتفاق می‌افتد که یک مثال نقض به‌جای اینکه یک مثال عام[3] در نظر گرفته شود، به‌عنوان «تنها» مورد موجود تلقی شود، برای مثال گاهی‌اوقات ریشه دوم ۲ به‌عنوان تنها عدد گنگ یا |x| تنها تابع پیوسته غیرمشتق‌پذیر در نظر گرفته می‌شود.

مطالعات مهم و روشن‌گرانه‌ای در این زمینه به هدف تحلیل رفتارهای دانش‌آموزان، دانشجویان و معلمان انجام شده است. در ادامه، این مطالعات در دسته‌بندی‌های کلی ارائه شده‌اند با این تذکر که از حیث موارد روش‌شناسی ممکن است تفاوت‌های بسیاری با هم داشته باشند:

– نحوه پیدا کردن مثال‌های نقض (Lakatos, 1976; Weber, 2009; Buchbinder &

1. Generic extension principle
2. Example space
مجموعه‌ای از مثال‌ها که فرد در هر لحظه به آنها دسترسی دارد (Zaslavsky, 1995, as cited in Bills et al., 2006).
3. Generic example

Zaslavsky, 2011)،

- نحوه بهبود حدس و درنتیجه اثبات، برای کنار گذاشتن مثال‌های نقض (Lakatos, 1976; Balacheff, 1991; Larsen & Zandieh, 2008; Reid, 2002; Komatsu, 2010; Komatsu, Jones, Ikeda & Narazaki, 2017; Komatsu & Jones, 2022; Yopp, Ely, Adams, Nielsen & Corwine, 2020; Yopp, 2020; Lew & Zazkis, 2019)،
- بررسی نگرش، درک و عملکرد شاگردان در استفاده از مثال نقض (Zaslavsky & Peled, 1996; Ko & Knuth, 2009; Klymchuk, 2012; Lee, 2016)،
- بررسی نوع مثال‌های نقض تولید شده توسط شاگردان و قدرت اقناع آن‌ها (Peled & Zaslavsky, 1997; Zazkis & Chernoff, 2008; Buchbinder & Zazkis, 2024).

با وجود مطالعات انجام شده، هنوز سؤالات مهمی در این حوزه مطرح است که پاسخ به یکی از آن سؤالات تمرکز این پژوهش است. پژوهش حاضر از حیث هدف کلی با دو دسته اخیر تحقیقات مطرح شده مشابهت‌هایی دارد، اما از حیث روش‌شناسی و در نتیجه نوع نگاه به مسئله متفاوت است. مطالعه کیفی حاضر به شیوه پدیدارنگاری و به هدف ارائه تصویر روشن‌تری از عملکرد، تصورات و چالش‌های دانش‌آموزان در هنگام مواجهه با یک مثال نقض انجام می‌شود. در این راستا مشخصاً به دنبال پاسخ به سؤال زیر است:

درک دانش‌آموزان از مثال نقض چه سطوحی دارد؟

پیشینه پژوهشی و چارچوب نظری

در میان دسته‌بندی‌های شکلی و عملکردی گسترده‌ای که از مثال‌ها وجود دارد، Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson, & Zaslavsky (2006) سه برچسب توصیفی ویژه برای مثال به کار می‌برند تا نشان دهند که چگونه مثال به‌عنوان یک شیء ریاضی، نه با کیفیت‌های خود شیء بلکه در شرایط مشخصی درک می‌شود. در ادامه، آن دسته‌بندی توسط نگارنده این سطور بسط داده شده است:

الف. «مثال عام»: Mason & Pimm (1984)، اصطلاح مثال عام را برای توصیف مثالی معرفی کردند که نشان دهنده مشخصه یک دسته یا یک مفهوم مجرد است و می‌تواند آن را نمایندگی کند. مثال‌های عام می‌توانند نحوه کار رویه‌ها و الگوریتم‌ها را نشان دهند یا تشکیل دهنده هسته یک اثبات عام باشند.

ب. «مثال نقض»: مثال‌های نقض برای ردِ یک فرضیه یا ادعا به کار می‌روند، اما ممکن است در چارچوب شکل‌گیری یک مفهوم (Dahlberg & Housman, 1997; Zaslavsky & Shir, 2005) یا حتی بخشی از تلاش برای ساخت یک اثبات (Lakatos, 1976) نیز استفاده شوند.

ج. «نامثال[1]»: نامثال‌ها به‌طور کلی برای روشن کردن مرزها به کار می‌روند؛ می‌توانند حدود و ثقور یک مفهوم را با تعیین خواص ضروری و غیرضروری آن نشان دهند؛ نامثال‌ها می‌توانند مواردی باشند که رویه‌ای بر آن‌ها اعمال نشود یا نتیجه مطلوب را ایجاد نکند یا شرایط عدم برقراری یک قضیه را نشان دهند.

در ادامه بخش حاضر ابتدا در مورد مثال نقض به‌عنوان یک زیرمجموعه مهم از انواع مثال بحث شده است. سپس نقش‌های آموزشی مثال نقض تفکیک و تشریح شده است.

- **مثال نقض**

از لحاظ ریاضیاتی یک مثال نقض برای ردِ یک گزاره کافی است، اما Zazkis & Chernoff (2008) دریافتند مثال‌های مختلف، تأثیر متفاوتی در متقاعد کردن یادگیرندگان در باطل در نظر گرفتن یک گزاره دارد. این دو محقق قدرت اقناع مثال‌های نقض را بسته به میزان تطابق و سازش آن‌ها با فضاهای مثال افراد می‌دانند.

در این راستا Peled & Zaslavsky (1997) مثال‌های نقضی که صرفاً نادرست بودن یک گزاره را ثابت می‌کنند و مثال‌های نقضی که ضمن ارائه توضیح، نادرستی گزاره را نشان می‌دهند، متمایز نموده و اهمیت آن‌ها را بیان کردند. آن‌ها سه نوع مثال نقض را با توجه به توان توضیحی آن‌ها در ساخت مثال‌های نقض مشابه یا تولید کل فضای مثال نقض، شناسایی کردند: مثال‌های خاص، نیمه-کلی و کلی[2]؛ مثال نقض خاص آن‌هایی هستند که ادعا را ابطال می‌کنند، اما هیچ اشاره‌ای به نحوه تولید مثال‌های نقض مشابه یا مرتبط نمی‌کنند؛ مثال‌های نیمه-کلی ایده‌هایی درمورد چگونگی تولید مثال‌های نقض مشابه یا مرتبط می‌دهند، اما کل داستان را نمی‌گویند یا کل فضای مثال‌های نقض را معلوم نمی‌کنند؛ در نهایت مثال‌های نقض کلی، دلیل نادرستی یک حدس خاص را با شناسایی ویژگی‌ها و روابط مرتبط بین اشیاء توضیح می‌دهند و راهکارهایی برای تولید کل فضای مثال‌های نقض ارائه می‌دهند. در پژوهش Peled &

---

1. Non-example
2. Specific, semi-general and general examples

Zaslavsky (1997) بررسیِ پیچیدگی محاسباتی تولید مثال‌های نقض کلی (توضیح‌دهنده) از جمله در توسعه الگوریتم‌ها و تکنیک‌های کارآمد، به‌عنوان پیشنهادی برای پژوهش‌های آتی مطرح شده است.

در مطالعات Alcock & Inglis (2008) و Weber (2009)[1] راه‌های تولید مثال نقض نیز بررسی شده است. یک مثال نقض، اثباتی برای ابطال یک گزاره است و برای ساخت یک اثبات، حداقل دو راه وجود دارد: ساخت نحوی و ساخت معنایی (Weber, 2009). در ساخت نحوی اثبات، فرد بدون ارجاع به بازنمایی‌های غیرصوری مفهوم، عمدتاً بر تعریف گزارۀ مورد اثبات و قوانین استنتاج برای یافتن نتایج منطقی از تعریف، تمرکز می‌کند، درحالی‌که ساخت معنایی اثبات، بیشتر با در نظر گرفتن بازنمایی‌های غیرصوری مفاهیم ریاضی مانند نمودارها، اشکال، حرکات یا مثال‌های نوعی اولیه[2] انجام می‌شود (Weber, 2009). درحالی‌که Alcock & Inglis (2008) استدلال می‌کنند که چون تولید مثال‌های نقض با ساخت یک محصول معنایی همراه است، باید بر اساس استدلال معنایی باشد، اما نتایج پژوهش Weber (2009) نشان می‌دهد اساس این محصول معنایی می‌تواند قویاً بر استدلال نحوی تکیه کند. در مطالعه موردی Weber (2009) دانشجوی مورد مطالعه برای بررسی فرضیه خود، مثال‌های مختلف را آزمایش نکرد. در عوض، گزاره‌هایی را فرمول‌بندی کرد که از نظر منطقی معادل گزاره اولیه بودند. سپس از آن‌ها به‌عنوان مبنایی برای ساخت مثال نقض استفاده کرد. رویکرد اولیه آن دانشجو برای تصمیم‌گیری درباره درست بودن ادعاهای ریاضی یا تولید مثال‌های نقض، مبتنی بر استدلال معنایی نبود، بلکه بر استنتاج منطقی تکیه داشت.

- **نقش‌های مثال نقض**

بدیهی است که درک دانش‌آموزان از نقش‌های مثال نقض تحت تأثیر تجربیات کلی آن‌ها با مثال‌ها است. برای دانش‌آموزان مثال زدن هنگام درک مفاهیم ریاضی، استدلال نمودن و ساخت اثبات می‌تواند راهگشا باشد. در ادامه نقش مثال نقض در ساحت‌های بالا توضیح داده می‌شود، هر چند که در زمان ریاضی‌ورزی این ساحت‌ها ممکن است هم‌پوشانی داشته باشند.

– تعارض شناختی و بازتنظیم درک افراد نسبت به مفاهیم ریاضی

1. این سه نفر پژوهش‌های مشترکی نیز در این زمینه انجام داده‌اند.

2. Prototypical examples

مثال‌های نقض برای تعیین حدود یک مفهوم می‌توانند به این صورت به کار گرفته شوند که یک گزاره را به‌عنوان تعریفِ ممکن از یک مفهومِ مشخص رد کنند؛ زمانی که یادگیرندگان با مثال‌ها و مثال‌های نقض یک مفهوم برخورد می‌کنند ممکن است دچار تعارض شناختی نسبت به تصور خود از مفهوم شوند (Zaslavsky & Shir, 2005). تعارض شناختی یک حالت روانشناختی است که شامل ناهماهنگی بین ساختارهای شناختی[1] مختلف یا بین ساختارهای شناختی و تجربه است؛ این ناهماهنگی زمانی اتفاق می‌افتد که بازنمایی‌های فعال و ناسازگار هم‌زمان برای یک پاسخ یکسان در نظر گرفته شوند (Waxer & Morton, 2012).

بنا به دیدگاه Piaget (1950) ساختارهای ذهنی کودکان طوری رشد می‌کنند که با تجارب تناسب داشته باشند؛ کودکان در تلاش برای رسیدن به تعادل بین ساختارهای درونی و اطلاعات برگرفته از محیطشان، ناهماهنگی‌های موجود در تجربیاتشان را تشخیص می‌دهند و شناخت پایدار و همگنی از محیط به دست می‌آورند. تشخیص یک تعارض شناختی می‌تواند موارد مشابه را به‌مرور کاهش دهد و از وقوع آن‌ها جلوگیری کند (Waxer & Morton, 2012).

در این خصوص Zazkis & Chernoff (2008, p. 197) خاطر نشان می‌کنند «محققان آموزش ریاضی به‌خوبی می‌دانند که یادگیرندگان ممکن است بدون احساس تعارض، ایده‌های متناقضی داشته باشند. به‌این‌ترتیب، ارائه یک مثال نقض ممکن است در یادگیرنده، تعارض شناختی ایجاد نکند. ممکن است [آن مثال] به‌سادگی کنار گذاشته شود یا به‌عنوان استثناء در نظر گرفته شود.» زازکیس و کرناف از مثال‌ها برای کمک به دانش‌آموزان برای مواجهه با تصورات نادرست خود استفاده کردند. آن‌ها ضمن معرفی مفاهیمِ مثال محوری و مثال پیوندزننده[2]، درمورد نقش آن‌ها در ایجاد و حل تعارض شناختی بحث می‌کنند:

اگر یک مثال در ادراک شناختی یادگیرنده یا در رویکردهای حل مسئله او نقطه عطفی ایجاد کند، برای او یک مثال محوری است؛ چنین مثال‌هایی ممکن است یک تعارض را نشان دهد یا ممکن است آن را حل کند. ... هنگامی که یک مثال محوری به برطرف شدن تعارض کمک می‌کند، از آن به‌عنوان یک مثال محوری–پیوندزننده یا ساده‌تر مثال پیوندزننده یاد می‌کنیم، یعنی

---

۱. یعنی بازنمایی‌های ذهنی که دانش، باورها، ارزش‌ها، انگیزه‌ها و نیازها را سازمان می‌دهد.

2. Pivotal example and bridging example

مثالی که مانند پیوند، تصورات (ساده‌انگارانه، نادرست یا ناقص) اولیه یادگیرنده را به تصورات ریاضی مقتضی متصل می‌کند (ص. ۱۹۷).

به‌این‌ترتیب یافته‌های Zazkis & Chernoff (2008)، همسو با نتایج حاصل از پژوهش‌های کوماتسو (Komatsu, 2016; Komatsu & Jones, 2022) نشان می‌دهد پیدا کردن و مد نظر قرار دادن مثال‌های نقض، به آفرینش دانش ریاضی جدید کمک می‌کند.

- بازتنظیم درک افراد نسبت به ماهیت استدلال و اثبات ریاضی

از یک طرف دانش‌آموز دوره متوسطه باید درک کرده باشد که برای اثبات درستی یک گزاره نمی‌توان به آوردن مثال اکتفا کرد و از طرف دیگر متقاعد شده باشد که برای ردِ درستی گزاره ادعا شده کافی است مثالی در نقض آن گزاره آورده شود. گذراندن این چالش به‌ظاهر متناقض برای دانش‌آموزان در درک ماهیت اثبات الزامی است و نقش مثال نقض را در این میان پررنگ می‌کند. به زعم Balacheff (1988) دانش‌آموزان پیشینه متفاوتی در توانایی اثبات کردن دارند: از تجربه‌گرایی ساده‌انگارانه[1] تا آزمایش فکری[2] می‌تواند مبنای اثبات آن‌ها باشد[3] و ریشه‌های باور آن‌ها به صدق یک گزاره را شکل دهد. در این صورت بحث درباره پیشینه «منطقی» دانش‌آموز می‌تواند مهم‌تر از نقد یک مثال نقض یا اصلاح یک حدسیه باشد (Balacheff, 1991). بالاشف در توضیح نکته ظریف خود اذعان می‌کند: برای دانش‌آموزی که در مواجهه با مثال نقض ادعا می‌کند که این یک مورد خاص است، باید این سؤال مطرح شود که آیا حدسیه او بر پایه تجربه‌گرایی ساده‌انگارانه است؟ در سطوح بالاتر تحصیلی نیز این مشکل می‌تواند ظاهر شود؛ امکان دارد دانش‌آموز یا دانشجویی در مورد قابل پذیرش بودن یک مثال نقض بحث کند، درحالی‌که درک او از دانش ریاضی مرتبط باید مورد سؤال قرار گیرد.

تا قبل از پژوهش Stylianides & Al-Murani (2010) یافته‌های مطالعات مختلف نشان می‌داد که برخی از دانش‌آموزان بر این باورند که می‌توان برای یک ادعا همزمان یک اثبات و یک مثال نقض داشت. جمع‌بندی این مطالعات نشان می‌داد از یک طرف برخی دانش‌آموزان تصور می‌کنند مثال نقض یک استثناء است که واقعاً گزاره ادعا شده را ابطال نمی‌کند

1. Naïve Empiricism
2. Thought Experiment
۳. توضیح بیشتر آنکه بالاشف چهار سطح سلسله‌مراتبی از توانایی دانش‌آموزان در مطالعهٔ خود شناسایی کرد: به‌ترتیب تجربه‌گرایی ساده‌انگارانه، آزمایش تعیین‌کننده (crucial experiment)، مثال عام و در آخر آزمایش فکری.

(Balacheff, 1991)؛ از طرف دیگر برخی از دانش‌آموزان بر این تصورند که اثبات‌ها واقعاً ثابت نمی‌کنند؛ چراکه این دانش‌آموزان هنوز درک نکرده‌اند که وقتی یک ادعای کلی اثبات می‌شود، درستی آن فراگیر است و بنابراین نیازی به بررسی مثال‌های بیشتر نیست (Fischbein, 1982). در مورد تصورات دانش‌آموزان درباره رابطه بین اثبات و ابطال، Stylianides & Al-Murani (2010) پژوهشی ترتیب دادند که در آن نتایج حاصل از تحلیل پرسشنامه همسو با نتایج قبل بود، اما نتایج به‌دست آمده از تحلیل داده‌های مصاحبه‌ها، شواهدی مبنی بر این بدفهمی دانش‌آموزان نشان نداد و همه دانش‌آموزان هنگام توضیح پاسخ‌های خود اذعان کردند که دو راه‌حل مثال نقض و اثبات را جدا از یکدیگر در نظر گرفته بودند؛ درواقع تناقض در نتایج، ناشی از نحوه تکمیل پرسشنامه بوده است.

با وجود پیچیدگی‌های پنهان شده در ماهیت استدلال و اثبات و درنتیجه، سختیِ یادگیری آن برای عموم دانش‌آموزان از جمله دانش‌آموزان ایرانی (Reyhani, Hamidi, & Kolahdouz, 2012; Ahmadpour, 2018)، انتظار می‌رود در تألیف کتاب‌های درسی ریاضی، حساسیت و دقت ویژه‌ای به آن‌ها شود. اما تحلیل محتوای کتاب‌های ریاضی هفتم و هشتم توسط Ahmadpour, Fadaei, & Rafiepour (2017) نشان داد توزیع استدلال‌های استنتاجی در فصول مختلف این کتاب‌ها نامتوازن و غیریکدست است و بعضاً به ملاحظاتی که باید در طرح سوالات اثباتی مدّ نظر گرفته شود، توجه نشده است. لذا لازم است محتوای این کتاب‌ها از منظر استدلال و اثبات مورد بازاندیشی و اصلاح قرار گیرند.

- ابطال گزاره‌های نادرست ریاضی

مطالعاتی انجام شده است که از شرکت‌کنندگان در پژوهش (خواه دانش‌آموز، دانشجو، دانشجو معلم و معلم) خواسته شده است، درمورد درستی یا غلطی یک گزاره قضاوت کنند یا گزاره داده شده را ابطال کنند (Zaslavsky & Peled, 1996; Dahlberg & Housman, 1997; Ko & Knuth, 2009; Buchbinder & Zaslavsky, 2011; Klymchuk, 2012; Lee, 2016). علی‌رغم تفاوت در شرکت‌کنندگان و نوع فعالیت‌ها، این پژوهش‌ها نتایج مشابهی داشتند؛ بسیاری از شرکت‌کنندگان نتوانستند نادرستی گزاره غلط را با استنتاج معتبر بیان کنند. به دلیل درک ناکافی از مفاهیم، استفاده نامناسب از دانش کاربردی، عدم آشنایی با مثال نقض به‌عنوان روشی برای ابطال یک گزاره، شرکت‌کنندگان در مورد درستی/نادرستی گزاره‌ها به اشتباه قضاوت کردند.

حدود دوسوم (۶۸ درصد) از دانشجویان شرکت‌کننده در پژوهش Klymchuk (2012) به دلایل مختلف نمی‌خواستند سؤالاتی که نیاز به تولید مثال نقض دارد، بخشی از ارزشیابی آن‌ها باشد؛ دلایلی که دانشجویان عنوان کردند، عبارتند از: سخت، گیج‌کننده و پیچیده هستند؛ ساختارمند نیستند؛ برای تسلط بر آن‌ها زمان کافی ندارند؛ به اندازه کافی برای این کار آموزش ندیده‌اند؛ نمی‌دانند چگونه باید شروع کنند. البته مابقی دانشجویان (۳۲ درصد) نظرات مثبتی ارائه کردند: در ماهیت فرآیندهای درگیر موجب تعمیم تفکر می‌شود؛ درک کامل موضوع را نشان می‌دهد؛ یک مهارت بسیار ارزشمند است؛ چالش‌برانگیز است و می‌توان از این روش در خارج از دانشگاه استفاده کرد.

Lee (2016) در پژوهش خود یک گزاره غلط در اختیار ۶۰ دانش‌آموز پایه نهم قرار داد و از آن‌ها خواست درمورد درستی گزاره قضاوت کنند. او از تحلیل پاسخ‌های کتبی آن‌ها سطوحی سلسله‌مراتبی به دست آورد:

سطح ۰. استفاده نامرتبط یا بسیار اندک از استنباط‌ها: دانش‌آموز نمی‌داند چطور باید اثبات کند و نمی‌تواند با مثال، ارتباط مقدم و تالی را برقرار کند.

سطح ۱. استفاده ناشیانه از مثال‌ها در استدلال: دانش‌آموز برای نشان دادن درستی گزاره، یک یا چند مثال که در آن گزاره صدق می‌کند، ارائه می‌دهد.

سطح ۲. استفاده استراتژیک از مثال‌ها در استدلال: مانند سطح قبل دانش‌آموز برای نشان دادن درستی گزاره یک یا چند مثال که در آن گزاره صدق می‌کند، ارائه می‌دهد، با این تفاوت که این مثال‌ها به صورت تصادفی انتخاب می‌شوند یا موارد اکستریم هستند.

سطح ۳. استنباط‌های استنتاجی با اشکالات عمده در اعتبار و انسجام منطقی: دانش‌آموز استنباط‌هایی استنتاجی ارائه می‌دهند که به دلیل وجود بدفهمی‌هایی به اشتباه، درستی گزاره را نشان می‌دهد.

سطح ۴. ساخت اثبات با مثال نقض: استنباط‌های استنتاجی منسجم که با ساخت یک یا چند مثال نقض به دست می‌آید.

سطح ۵. ساخت اثبات با مثال نقض کلی: استنباط‌های استنتاجی منسجم که با ساخت یک مجموعه کلی از مثال‌های نقض به دست می‌آید.

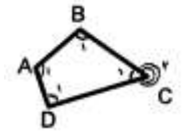
- کمک به اصلاح اثبات در فرایند ساخت آن

برخی افراد اگر مثال نقضی برای یک حدس ببینند، آن را رها می‌کنند، درحالی‌که برخی دیگر به دنبال درک دلیل نادرستی آن حدس هستند و به این واسطه حدس اولیه را به حدس‌های مناسب‌تر تغییر می‌دهند. ریاضیدان‌ها در حین بررسی انسجام زنجیره منطقی از استدلال‌های ریاضی، به دنبال یافتن مثال نقض نیز هستند. Lakatos (1976) یکی از متقدمین پژوهش آموزشی درمورد این نقشِ مهمِ مثال نقض بود. پس از او نیز محققان دیگری نیز با الهام از او تحقیقاتی را به انجام رساندند (Balacheff, 1991; Larsen & Zandieh, 2008; Reid, 2002; Komatsu, 2010; Stylianides & Al-Murani, 2010; Pinto & Cooper, 2023).

روش‌شناسی پژوهش

این پژوهش با هدف توصیف تجربیات دانش‌آموزان در ادراک یک مثال نقض طراحی و به شیوه پدیدارنگاری انجام شد. این روش از سنت‌های پژوهش کیفی است و اشکال مختلف تفکر را مشخص و نظام‌مند می‌کند (Marton, 1981). در این روش پژوهشی «تصورات و شیوه‌های ادراک به‌عنوان ویژگی‌های فردی دیده نمی‌شوند. بلکه تصورات [شرکت‌کنندگان در پژوهش] نسبت به واقعیت به‌عنوان طبقه‌های توصیفی در نظر گرفته می‌شوند تا برای تسهیل درک موارد مشخص از عملکرد انسانی مورد استفاده قرار گیرند» (Marton, 1981, p. 177).

شرکت‌کنندگان شامل ۲۶ دانش‌آموز پایه هشتم دوره متوسطه اول (دختر و پسر) از ۱۲ مدرسه، در یکی از شهرهای جنوبی کشور است. ازآنجاکه هدف احصاء تفاوت در برداشت‌ها بوده است، لذا در انتخاب شرکت‌کنندگان علاوه بر اینکه از قاعده تفاوت حداکثر استفاده شد (Flick, 1998)، انتخاب شرکت‌کنندگان تا رسیدن به موردی که پس از آن اطلاعات جدیدی به دست نیامد، ادامه یافت (Gall, Borg, & Gall, 1996). ابزار گردآوری داده‌ها، آزمون‌های قلم-کاغذی و مصاحبه‌های نیمه‌ساختاری با دانش‌آموزان بود. مصاحبه‌ها حول یک مسئله هندسی که در شکل ۱ آمده انجام شد.

<table>
<tr><td colspan="2">✓ اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی در یک چهارضلعی، برابر مجموع سه زاویه داخلی دیگر است.
آیا جمله بالا درست است؟ برای توجیه پاسخ خود، از میان استدلال‌های زیر یکی را انتخاب کنید یا خودتان دلیل بیاورید.</td></tr>
<tr><td>استدلال الف.
درست است. چون اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی در یک سه‌ضلعی برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی دیگر است، پس در چهارضلعی نیز همین‌گونه خواهد بود.</td><td>استدلال ب.
غلط است. چون در مربع زاویهٔ خارجیِ یک رأس ۹۰ درجه ولی مجموع زوایای داخلی دیگر رأس‌ها ۲۷۰ درجه است.</td></tr>
<tr><td>استدلال ج.
درست است. چون در چهارضلعی $ABCD$، مجموع زوایای داخلی ۳۶۰ درجه است. هم‌چنین اندازهٔ زاویهٔ خارجی هر رأس برابر ۳۶۰ منهای اندازهٔ زاویهٔ داخلی است. بنابراین:


$\widehat{A_1}+\widehat{B_1}+\widehat{C_1}+\widehat{D_1}=360^\circ$
$\widehat{C_1}+\widehat{C_2}=360^\circ$
بنابراین:
$\widehat{A_1}+\widehat{B_1}+\widehat{C_1}=\widehat{C_2}$</td><td>استدلال شما.</td></tr>
</table>

شکل ۱. مسئله مورد مصاحبه

گزاره مورد سؤال، نادرست است و در کتاب درسی ریاضی پایه هشتم (Amiri, Pandi, Khosroabadi, Davoodi, Reyhani, Seyedsalehi, & Sadr, 2024, p.47) از دانش‌آموزان خواسته شده مثالی برای نشان دادن نادرستی آن بیاورند. با تغییر صورت سؤال کتاب به مسئله‌ای که دانش‌آموز باید درمورد درستی یک گزاره قضاوت کند، درجه دشواری سؤال بالا رفت. ضمن اینکه استدلال‌های نادرست الف و ج با هدف کنکاش و بررسی تصورات دانش‌آموزان از ماهیت اثبات و ارتباط آن با مثال نقض اضافه شدند.

جمع‌آوری داده‌ها به‌این‌ترتیب بود که دانش‌آموزان ابتدا به صورت انفرادی به حل مسئله مطرح شده در شکل ۱ پرداختند. زمان حل مسئله‌ها بنا به خواستهٔ هر دانش‌آموز متغیر بود.

دانش‌آموزان در هر زمانی که کارشان تمام می‌شد، روش حل و دلایل پاسخ‌های خود را شرح می‌دادند. مصاحبه‌کننده (که محقق این پژوهش است) علاوه بر پرسیدن سؤالات از پیش تعیین شده، بنابر شرایط خاصِ هر مصاحبه، سؤالاتی را مطرح می‌کرد. مصاحبه‌ها ضبط صوتی شد و از جزئیات رفتار شرکت‌کنندگان در تحقیق، یادداشت‌های میدانی تهیه گردید. با بیشتر شدن تعداد مصاحبه‌ها، تعداد پاسخ‌های تکراری در میان جواب‌های دریافتی از دانش‌آموزان بیشتر می‌شد تا نهایتاً در مصاحبه‌های پایانی، پاسخ جدیدی دیده نشد. با تکرار پاسخ‌ها در مصاحبه‌ها، اعتبار پاسخ‌های قبلی نیز افزایش یافت (Gall & et al., 1996).

برای تجزیه و تحلیل داده‌ها، ابتدا تمام مصاحبه‌های ضبط شده، با جزئیات، پیاده‌سازی شدند، سپس تصویر پاسخ‌های مکتوب دانش‌آموزان در متن پیاده‌سازی‌شده از مصاحبه‌ها جانمایی شدند. در ادامه داده‌های حاصل، مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفتند و نتایج تحلیل شده، در طبقه‌بندی‌های توصیفی قرار گرفتند. این شیوه بر اساس رویه کدگذاری نظری و به روش Strauss & Corbin (1998) انجام شد. هدف، توصیف و تحلیل تجارب دانش‌آموزان در فهم استدلال‌های ارائه شده به آن‌ها بود. به منظور کاهش نظام‌وار داده‌ها، تحلیل در چند مرحله انجام شد؛ در حین تحلیل از سه کدگذاری باز، محوری و گزینشی استفاده گردید. طی آن‌ها داده‌ها تجزیه، مفهوم‌سازی و به شکل تازه‌ای در کنار یکدیگر قرار داده شدند. با بررسی کدهای به دست آمده، آن‌ها در طبقات توصیفی ابتدایی قرار گرفتند. ضمنِ در نظر داشتن این طبقات، دوباره به متن مصاحبه‌های پیاده‌سازی‌شده رجوع شد تا بررسی شود که آیا طبقات مستخرج، توان توصیف‌کنندگی و دلالت کافی بر داده‌ها را دارند یا خیر. این فرایندِ اصلاح و بازنگری تا جایی ادامه یافت که طبقات اصلاح شده با داده‌های مصاحبه سازگار شدند.

بحث و نتیجه‌گیری

در این بخش نتایج حاصل از تحلیل عملکرد دانش‌آموزان در پاسخ به مسئله مطرح شده در شکل ۱ گزارش می‌شود. در این مسئله، شرکت‌کنندگان در پژوهش دربارهٔ درستی یک گزاره هندسی قضاوت کردند. با توجه به سؤال پژوهشی در مورد سطوح درک دانش‌آموزان از مثال نقض، نحوه مواجهه دانش‌آموزان با استدلال ب، در طول مصاحبه توصیف و تشریح می‌شود. استدلال‌های نادرست الف و ج و در نظر گرفتن فضایی خالی برای استدلال دانش‌آموز (تحت

عنوان «استدلال شما»)، فرصت بررسی عمیق‌تر تصورات دانش‌آموزان را فراهم نمود و برای برخی از دانش‌آموزان، محرک و ایده‌ای برای دیدن مثال نقض کلی شد. جدول ۱ شامل طبقات توصیفی مختلف از درک دانش‌آموزان نسبت به مثال نقض است.

جدول ۱. طبقه‌بندی درک دانش‌آموزان از مثال نقض

۱. عدم درک مثال
۲. درک مثال به تنهایی
۳. درک اثر مثال بر نقضِ ادعای مطرح شده
۴. دیدن مثال به‌عنوان نماینده یک مجموعه
۵. تولید کل فضای مثال نقض

در ادامه هر یک از طبقات توصیفی با مثالی از عملکرد دانش‌آموزان تشریح می‌شود. همچنین در ارجاع به شرکت‌کنندگان، از اسم‌های مستعار استفاده شده تا محرمیت آنان، حفظ شود.

۱. عدم درک مثال

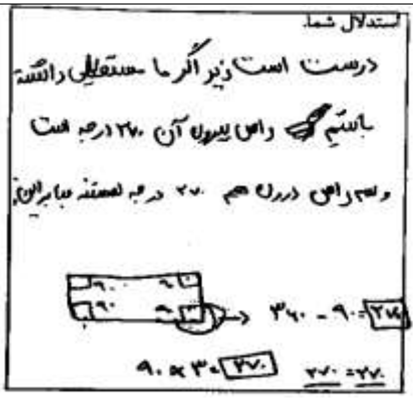
مثال ارائه شده در استدلال ب توسط برخی از شرکت‌کنندگان در پژوهش درک نشد، بررسی عملکرد آن‌ها نشان دهنده دو دلیل عمده، یکی نداشتن پیشینه دانشی کافی و دیگری داشتن مشکلاتی در خواندن و درک استدلال کلامی بود.

الف. نداشتن پیشینه دانشی کافی

عدم درک یک مثال می‌تواند به دلیل نداشتن پیشینه دانشی کافی از جمله تعاریف، قضایا، رویه‌ها، نمادها و قراردادها باشد. در مثال ارائه شده در استدلال ب، دانستن مفهوم زاویه خارجی و داخلی، نحوه رسم و محاسبه آن‌ها کلیدی است. اشتباه در رسم زاویه خارجی در کار بسیاری از دانش‌آموزان دیده شد. حتی برخی از آن‌ها با این که زاویه خارجی را در مثال اولیه خودشان از مثلث و مربع به‌درستی مشخص کردند، ولی در شکل استدلال ج، زاویه C_2 را به‌عنوان زاویه خارجی در نظر گرفتند.

پاسخ زیر نمونه مشخصی از این حالت است که به دلیل کمبود دانش زمینه‌ای، مثال نقض داده شده درک نشده است. دلیل اشتباه استدلال ب را از نظر امیرحسین در ادامه ببینید.

امیرحسین	من مثل این [با اشاره به استدلال ب] [1] نوشتم ولی اون، اشتباه جوابو به دست آورده. به نظر من وقتی که یه مستطیل داشته باشیم، بعد این ۹۰ باشه، خب ۳۶۰ کلش هست، ما باید این ۹۰ رو ازش کم کنیم، ببینیم چقدر می‌شه. می‌شه ۲۷۰ درجه. میگه آیا این زاویه‌ای که اینجا باقی می‌مونه با این سه تا برابره؟ ما باید این سه تا را هم به دست بیاریم. ۹۰ را ضرب در سه می‌کنیم، می‌شه ۲۷۰. پس با هم برابره.

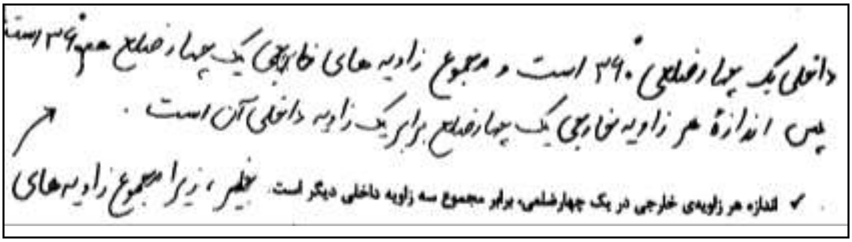


شکل ۲. پاسخ کتبی امیرحسین

ب. داشتن مشکلاتی در خواندن و درک استدلال کلامی

ضمن انجام مصاحبه با دانش‌آموزان مشاهده شد برخی از آن‌ها در خواندن و درک مثال نقض ارائه شده در استدلال ب مشکلاتی دارند. از میان آن دانش‌آموزان، برخی حتی آن مثال نقض را به‌تنهایی و به زبان خودشان پیدا کردند، ولی در عین حال همچنان استدلال ب را نادرست می‌دانستند. برای نمونه، فاطمه ابتدا در پاسخ به سؤال، توضیح کلامی نوشته شده در شکل ۳ را در برگه پاسخ خود نوشت. هر چند که صورت پاسخ فاطمه، در حالت کلی برای همه چهارضلعی‌ها ادعایی نامعتبر است، اما در مصاحبه به صراحت در مورد نوشته خود توضیح می‌دهد که این استنباط، برای مربع انجام شده است. در واقع او توانسته است مثال نقض بیان شده در استدلال ب را با روند استنباطی دیگری، تولید کند.

۱. در پیاده‌سازی‌ها، براکت ([]) شامل توضیحاتی در مورد اتفاقات غیرگفتاری است.


داخلی یک چهارضلعی ۳۶۰ است و مجموع زاویه های خارجی یک چهارضلعی هم ۳۶۰ است
پس اندازهٔ هر زاویه خارجی یک چهارضلعی برابر یک زاویه داخلی آن است.
✓ اندازه هر زاویه‌ی خارجی در یک چهارضلعی، برابر مجموع سه زاویه داخلی دیگر است. خیر، زیرا مجموع زاویه‌های

شکل ۳. پاسخ کتبی فاطمه (پاسخ از خط سوم تصویر شروع می‌شود و ادامه آن در خط اول است.)

فاطمه: مجموع زاویه‌های خارجی یک چهارضلعی ۳۶۰ درجه است، مجموع [زوایای] داخلی چهارضلعی هم ۳۶۰ است. برای همین یک زاویه خارجی چهارضلعی مثل مربع، با یک زاویه داخلیش برابره.

مصاحبه‌کننده: بعد شما چرا «خیر» نوشتی؟

فاطمه: خب برای اینکه گفته هر زاویه خارجیش برابر با سه زاویه داخلیه، درصورتی‌که یک زاویه خارجی برابر یک زاویه داخلیه.

مصاحبه‌کننده: بعد یه زاویه داخلی چند درجه است؟

فاطمه: ۹۰ درجه.

مصاحبه‌کننده: یه زاویه خارجی چند درجه است؟

فاطمه: ۳۶۰ درجه زاویه خارجیه، چون چهار تا ضلع داریم، تقسیم به چهار می‌کنیم، اونم باز می‌شه ۹۰.

در ادامه مصاحبه، از فاطمه درمورد درستی استدلال ب سؤال می‌شود. پاسخ او به شرح زیر است:

فاطمه: این درسته. [پنج ثانیه مکث می‌کند.] این اشتباهه. درسته یه زاویه خارجی یه مربع ۹۰ درجه است ولی گفته مجموع زوایای داخلی دیگه‌اش ۲۷۰ درجه است. درصورتی‌که مجموع زاویه‌های داخلی یه مربع یا یه مستطیل ۳۶۰ درجه است، کمتر گفته.

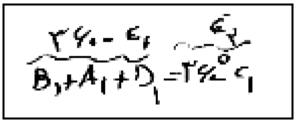
فاطمه به‌روشنی در درک گزاره پایانی استدلال ب دچار اشکال شد. در استدلال ب آمده است که «چون در مربع زاویهٔ خارجیِ یک رأس ۹۰ درجه ولی مجموع زوایای داخلی دیگر رأس‌ها ۲۷۰ درجه است». فاطمه برای سادگی اولین واژه «رأس» را در استدلالش حذف کرد، سپس عبارت «مجموع زوایای داخلی دیگر رأس‌ها» را به «مجموع زوایای داخلی دیگه‌اش»

خلاصه کرد و به اشتباه از آن استنباط نمود که مجموع همه زاویه‌های داخلی مدنظر است. این در حالی است که فاطمه این مثال نقض را قبلاً پیدا کرده بود و دانش ریاضی کافی برای پیدا کردن ۲۷۰ درجه داشت. اشتباه فاطمه، می‌تواند ناشی از مشکل وی در خواندن و درک مسائل و توضیحات کلامی باشد[۱].

۲. درک مثال به تنهایی

ویژگی این مرحله، عدم توجه به ارتباط مثال نقض با فضای مطرح شده در آن است. درواقع فرد کارکرد مثال نقض را در ویژگی‌های مجموعه‌ای از اشیاء نمی‌بینند. درحالی‌که در گزاره کلی مسئله، ادعایی درمورد همه اعضاء یک مجموعه مطرح شده است، نقش مثال نقض در رد آن ادعا توسط فرد دیده نمی‌شود و فقط ویژگی‌های موضعی[۲] مثال درک شده است.

برای دیدن مثالی در این سطح، پاسخ عماد قابل توجه است. او در ابتدای مصاحبه استدلال ج را درست می‌دانست، چرا که زاویه خارجی را به اشتباه مکمل زاویه داخلی متناظر آن فرض کرده بود. او مهارت و خبرگی کافی برای درک و انجام استنباط‌های جبری استدلال ج را داشت و برای توضیح بیشتر نتیجه‌گیری پایانی استدلال ج، عبارت شکل ۴ را به‌خوبی در مصاحبه توضیح داد.



شکل ۴. پاسخ کتبی عماد

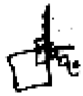
مواجهه عماد با مثال نقضِ استدلال ب اهمیت خاص دارد. زمانی که مصاحبه‌کننده به او یادآوری می‌کند که برای پیدا کردن زاویه خارجی یک رأس، باید یکی از اضلاع آن رأس را امتداد دهد و متمم زاویه داخلی را به‌عنوان زاویه خارجی در نظر گیرد، عماد می‌گوید؛

عماد	هوم، اشتباه رفتم. هم این اشتباهه و هم این [با اشاره به استدلال‌های الف و ج]. این [استدلال ب] درسته.
مصاحبه‌کننده	چطور می‌گی این [استدلال ب] درسته؟
عماد	اگر این ۹۰ درجه باشه [۹۰ درجه در شکل زیر مشخص شده است]. [بلافاصله پاسخ

۱. با توجه به این که تمرکز مطالعه بر این مورد نبود، در مصاحبه به آن پرداخته نشد.

2. local

خود را تغییر می‌دهد.] نه، زاویه خارجی این می‌شه [منظور زاویه متقابل به رأس آن در شکل زیر است].



مصاحبه‌کننده چه فرقی می‌کنه کدوم رو بکشی؟ اگر قبلی رو بکشی چه اشکالی داره؟

عماد آهان، اون طرفی هم می‌شه.

مصاحبه‌کننده فرقی نمی‌کنه، پس؟

عماد نه، فرقی نمی‌کنه، [زاویه خارجی] ۹۰ درجه است.

مصاحبه‌کننده حالا گفته چی؟ آیا این استدلال می‌تونه استدلال درستی باشه؟

عماد این استدلال درستیه.

مصاحبه‌کننده پس [ادعای مطرح شده در سؤال] غلط است. چون در مربع زاویهٔ خارجیِ یک رأس ۹۰ درجه ولی مجموع زوایای داخلی دیگر رأس‌ها چند درجه است؟

عماد مجموع ۲۷۰ درجه است.

مصاحبه‌کننده این مثال زده، حالا چون مثال آورده این واقعاً غلط می‌شه؟ برای اینکه بگیم غلطه، یک مثال بیاریم کافیه؟

عماد فکر نکنم [کافی] باشه. [در ادامه مکث داشت و به فکر فرو رفت.]

مصاحبه‌کننده شما به من توضیح بده، چی رو می‌خوای به من نشون بدی.

عماد من می‌خوام ببینم توی یه چهارضلعی دیگه به غیر از مربع باشه، اونها هم مثل همین می‌شن؟ [پس از روخوانی دوباره صورت سؤال:] اگه ضلع‌هاش مساوی نباشند، ممکن است این اتفاق نیفته.

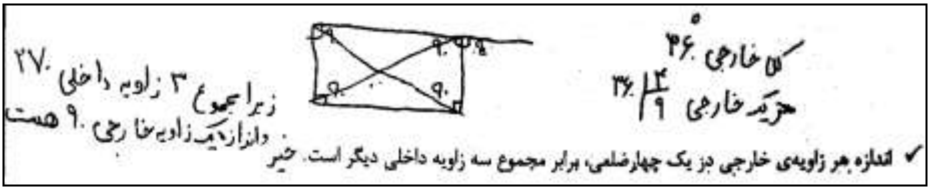
عماد مهارت و تسلط خوبی در درک استنباط‌های جبری مطرح شده در استدلال ج داشت و می‌دانست که برای اثباتِ درستی یک گزاره باید در حالت کلی استدلال کرد. با این وجود، او به اشتباه مثال مربع را به‌عنوان نقضِ گزاره کافی نمی‌دانست و به دنبال استدلال کلی بود.

۳. درک اثر مثال بر نقضِ ادعای مطرح شده

دانش‌آموز در این سطح ارتباط مثال نقضِ استدلال ب را بر ابطال گزاره مطرح شده درک می‌کند. به‌عبارت‌دیگر ارتباط ویژگی یک مثال با ویژگی ادعا شده برای کل اعضای مجموعه چهارضلعی‌ها توسط دانش‌آموز دیده می‌شود؛ بنابراین، درک بالاتری از نقش مثال نقض نسبت

به سطح قبلی وجود دارد. برای نمونه، شقایق ضمن درک مثال مطرح شده در استدلال ب، اثر آن را بر ردِ گزاره مورد سؤال نیز درک کرده است.

شقایق	اندازه هر زاویه خارجی در یک چهارضلعی، مستطیل یا مربع فرقی نداره، چون زاویه داخلیشون نوده، گفته یه دونه خارجی که می‌شه ۹۰. آخه [مجموع زوایای خارجی] سیصد و شصته، ۳۶۰ رو تقسیم بر چهار می‌کنیم می‌شه ۹۰.
مصاحبه‌کننده	خب.
شقایق	بعد گفته با سه تا مجموعشون برابره. [منظور این است که برابر مجموع سه زاویه داخلی است]. سه تا ۹۰ را با هم جمع کنیم می‌شه، ۲۷۰. پس ۹۰ و ۲۷۰ با هم برابر نیست. من این رو اینجا نوشتم [شکل ۵]، دیدم خودشم اینجا [در استدلال ب] نوشته.



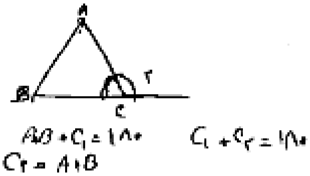
شکل ۵. پاسخ کتبی شقایق

۴. دیدن مثال به‌عنوان نماینده یک مجموعه

در این سطح، دانش‌آموز مثال مطرح شده در استدلال ب را به‌عنوان نماینده مجموعه چهارضلعی‌های محدب می‌بیند و مشخصه‌های خاص آن مثال را در نظر نمی‌گیرد و در استدلال خود، صرفاً ویژگی‌های مشترک بین همه اعضای آن مجموعه را به کار می‌برد. به عبارت دیگر این مثال، در نگاه آن دانش‌آموز، «مثال عام» است.

مصاحبه بهار برای تبیین این سطح و سطح بعدی یافته‌های پژوهش آورده می‌شود. بهار، مثال نقض استدلال ب را برای نشان دادن نادرستی گزاره درست نمی‌داند و برای ساختن اثباتی کلی، تلاش می‌کند.

بهار: استدلال الف درست نیست، چهارضلعی و سه‌ضلعی با هم فرق می‌کنند. در سه‌ضلعی، زاویه‌های داخلی ۱۸۰ هست، در چهارضلعی ۳۶۰ هست. خب پس این غلطه. [روی مثلثی که رسم کرده است، اشاره می‌کند و می‌گوید:] این [جمع C_1 و C_2] ۱۸۰ می‌شه، یعنی اگه این [زاویه C_2] زاویه خارجی من باشه، $A+B+C_1$ می‌شه ۱۸۰. بعد دوباره این C_2 من برابره $A+B$.



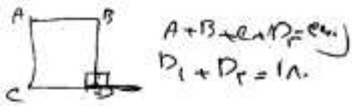
مصاحبه‌کننده: چرا $A+B$ برابره C_2 می‌شه؟

بهار: چون من می‌گم $A+B+C_1$ می‌شه ۱۸۰درجه، بعد C_1+C_2 می‌شه ۱۸۰ درجه. پس $A+B+C_1$ برابره C_1+C_2. در این صورت در [دو طرف] معادله آن‌هایی که مشابه‌اند، حذف می‌شند، می‌شه $A+B$ برابره C_2.

$$A+B+\cancel{C_1}=\cancel{C_1}+C_2$$

مصاحبه‌کننده: خب.

بهار: تو چهارضلعی مجموع زوایای داخلیش ۳۶۰ هست. حالا اگه من این رو مربع در نظر بگیرم [با اشاره به شکل مربعی که قبلاً کشیده بود]، $A+B+C+D_1$ می‌شه ۳۶۰، اما D_1+D_2 می‌شه ۱۸۰ درجه. پس این دو تا برابر نیستند، معادله نمی‌تونه برابر باشه.

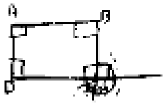


مصاحبه‌کننده: خب، شما خودت چه استدلالی نوشتی اینجا؟ [با اشاره به جایی که برای استدلال خود دانش‌آموز در نظر گرفته شده بود.] برای مربع مثال زدی؟

بهار: یه مستطیل در نظر گرفتم، گفتم مجموع زوایاش [زوایای داخلی‌اش] می‌شه ۳۶۰. بعد این ۹۰ درجه است زاویه خارجیش. مجموع این سه تا [زوایای داخلی دیگر رأس‌ها]، سه تا ۹۰ تا می‌شه ۲۷۰ درجه. ۹۰ تا گفتم برابر نیست با ۲۷۰.

استدلال شما.

این استدلال غلط است.



$A+B+C+D=$ ۳۶۰

۹۰ $\neq A+B+C$

۲۷۰

مصاحبه‌کننده	استدلال ب چی؟
بهار	گفته غلطه. چون در مربع زاویه خارجی یک رأس ۹۰ درجه است. اینم همینه که من گفتم.
مصاحبه‌کننده	چرا زیرش [زیر استدلال ب] نوشتی «درست است ولی استدلال درستی نیست.»؟
بهار	خب، باید ثابت می‌کرده، حالا اینجا [مثال عامی که در اوایل مصاحبه توضیح داد] ثابت کردم.
مصاحبه‌کننده	شما تو استدلال خودت هم مثال زدی.
بهار	بله متوجه شدم، یادم رفته.

همه استدلال‌های مطرح شده در حین مصاحبه، قبل از آن توسط بهار روی کاغذ نوشته شده بود. وی استدلال مطرح شده در گزینه ب و استدلال روی مستطیل را برای ابطال گزاره مورد سؤال درست نمی‌داند، هر چند که درستی استنباط‌های روی آن مثال‌ها را تأیید می‌کند. او با اطمینان خاطر از پاسخ خود، در همان ابتدای مصاحبه، ایده به کار رفته در مثلث را به‌درستی برای مربع تعمیم می‌دهد. بهار از ویژگی‌های خاص مربع استفاده نمی‌کند؛ بلکه نوشته‌های او برای همه چهارضلعی‌های محدب صحیح است و به‌این‌ترتیب، یک «مثال عام» فراهم می‌کند. اما در انتهای مصاحبه نسبت به نقش این مثال در ابطال گزاره مورد سؤال، تردید نشان می‌دهد. اشکال دیگر کار او آن است که به وجود سور عمومی[1] در گزاره مورد سؤال توجه نمی‌کند و

1. Universal quantifier

وقتی در یک گزاره، «برای همهٔ» اعضای مجموعهٔ مورد نظر، ادعایی مطرح شده باشد، سور عمومی به کار رفته است. گزارهٔ «*اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی در یک چهارضلعی، برابر مجموع سه زاویهٔ داخلی دیگر است*»، دارای دو سور عمومی است. چون ادعایی برای هر زاویهٔ خارجی در هر چهارضلعی مطرح شده است. بهار در پاسخ خود به این نکته توجه نمی‌کند که وقتی در

بنابراین اثر مثال‌های نقض خاص (استدلال ب و استدلال خودش روی مستطیل) را بر ابطال گزاره مورد سؤال نمی‌بیند. او مانند عماد متوجه کارکرد مثال نقضِ خاص نیست.

۵. تولید کل فضای مثال نقض

بهار در ادامه مصاحبه، دیگر اشاره‌ای به مربع نمی‌کند و استدلال خود را برای هر چهارضلعی محدب بیان می‌کند تا در نهایت، رابطه بین زاویه خارجی یک رأس و مجموع زوایای داخلی دیگر رأس‌ها را پیدا می‌کند.

مصاحبه‌کننده: ببین وقتی می‌خوایم بگیم یه جمله غلطه، چی کار باید بکنیم؟ من مثلاً به شما می‌گم: هر [با تأکید گفته شد] چهارضلعی رو، اگه هر زاویه خارجیش رو در نظر بگیریم، برابره مجموع اون سه تا زاویه داخلیه دیگه است. شما برای اینکه به من بگی دارم اشتباه می‌گم، چی باید به من بگی؟

بهار: من می‌گم اگر من چهار تا زاویه‌اش [زوایای داخلی] رو با هم جمع کنم، می‌شه ۳۶۰. ولی یک زاویه داخلی و خارجی [در یک رأس]، مجموعشون می‌شه ۱۸۰. بعد ۳۶۰ برابر ۱۸۰ نیست.

مصاحبه‌کننده: خب، کاری نداره، من ۱۸۰ رو ضرب در ۲ می‌کنم. اون طرف تساوی رو هم ضرب در ۲ می‌کنم. حالا این دو تا با هم برابره، این دو تا را با هم مساوی قرار بده.

$$A+B+C+D=360$$
$$2(D_1+D_2)=180\times 2$$

بهار: نمی‌شه دیگه، شما الان اندازه D_2 را دو برابر کردید. این طوری مجموع زاویه‌ها به هم می‌خوره.

مصاحبه‌کننده: اشکال نداره، شما دو طرف این تساوی رو با هم مساوی قرار بدی چی می‌شه؟

بهار: $A+B+C+D_1$ برابره $2D_1+2D_2$. خب اینا [D_1ها] با هم ساده بشن، می‌مونه یه D_1 بعلاوه دو تا D_2 برای این طرف.

$$A+B+C+\cancel{D_1}=2\overset{D}{\cancel{D_1}}+2D_2$$

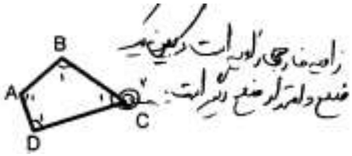
مصاحبه‌کننده: پس مجموع این سه تا [با اشاره به $A+B+C$] برابر با یه D_1 با دو تا D_2 هست.

مستطیل، اندازهٔ یک زاویهٔ خارجی برابر با مجموع سه زاویهٔ داخلی دیگر نیست، بنابراین نمی‌توان برابری زاویهٔ خارجی با مجموع سه زاویهٔ داخلی دیگر را برای همهٔ اعضای مجموعهٔ چهارضلعی‌ها ادعا نمود. پس گزارهٔ مورد سؤال ابطال می‌شود.

بهار ولی این زاویه خارجی نمی‌شه. زاویه خارجی بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگه است.

مصاحبه‌کننده بله، یعنی D_2. پس اشکال این استدلال [ج] هم همینه؟ در واقع C_2 را کل اینجا [با اشاره به C_2 در شکل] در نظر گرفته شده.

بهار بله، نوشتم. زاویه خارجی، بین این ضلع و امتداد ضلع دیگه است.



بهار با به دست آوردن رابطه صحیح بین زوایای داخلی و خارجی، ادعایی که در سؤال مطرح شده بود را رد کرد، زیرا نتیجه به‌دست آمده نشان می‌دهد این ادعا برای همه چهارضلعی‌های محدب نادرست است. با این مثال، بهار دلیل درست نبودن گزاره کلی را با شناسایی ویژگی‌ها و روابط بین اشیاء توضیح می‌دهد و درنتیجه، کل فضای مثال نقض[1] مشخص می‌شود.

در انتهای مصاحبه، با توجه به اینکه بهار متوجه اثر مثال‌های نقض خاص نشده است، مصاحبه‌کننده توجه بهار را به سور عمومی در گزاره مورد سؤال جلب و تأکید می‌کند که ادعای مطرح شده برای همه چهارضلعی‌ها باید صحیح باشد، درحالی که بهار نشان داده است که این ادعا برای مستطیل صحیح نیست.

مصاحبه‌کننده اوهوم. حالا به نظرت استدلال ب یا استدلالی که اینجا نوشتی [استدلال مربوط به مثال خاص مستطیل]، هیچ کدوم استدلال درستی نیستند؟

بهار چرا هستند. ولی [این استدلال‌ها، ادعای مطرح شده در سؤال را] ثابت نکردند.

مصاحبه‌کننده وقتی این جمله می‌گه هر چهارضلعی که داشته باشیم این جوری هست ولی شما یه مثال زدی گفتی مستطیل این جوری نیست، حرف من رو رد نکردی؟

بهار چرا. یعنی درست نیست.

این نشان می‌دهد که بهار دچار شک شده و توجه او به وجود شکافی در ادعای کلی معطوف شده است.

۱. باید خاطر نشان کرد که این ادعا برای هیچ‌یک از چهارضلعی‌های ساده (محدب و مقعر) برقرار نیست و موضوع بحث آن خارج از دانش ریاضی پایهٔ هشتم است.

بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، شرکت‌کنندگان درمورد درستی یک گزاره هندسی قضاوت کردند. درحالی‌که چند استدلال درست و نادرست در اختیار آن‌ها گذاشته شده بود، می‌توانستند استدلال خود را نیز ارائه دهند. نتایج مواجهه دانش‌آموزان با مثال نقض مطرح شده در استدلال ب، در بخش قبل با جزئیات بیان شد و یک طبقه‌بندی از عملکردها و واکنش‌های دانش‌آموزان به دست آمد. این طبقه‌بندی روند دقیق‌تری از امکان پیشرفت دانش‌آموزان را از درک ماهیت و نقش مثال نقض روشن می‌کند. نتایج این پژوهش، مثال‌های روشنی را از کار دانش‌آموزان درمورد قدرت اقناع‌کنندگی مثال نقض برای آن‌ها تا درجه توضیح‌دهندگی مثال‌ها ارائه می‌دهد. در مقایسه با نتایج Peled & Zaslavsky (1997)، نوع پاسخ‌های سطح ۳ تا ۵ به‌ترتیب مشابه نوع مثال‌های نقض خاص، نیمه‌کلی و کلی هستند. اما در طبقه‌بندی Lee (2016)، دو سطح پایانی درمورد مثال نقض است که به ترتیب مثال نقض خاص و کلی هستند. نتایج هر دو پژوهش Peled & Zaslavsky (1997) و Lee (2016) سطوحی سلسله‌مراتبی هستند، درحالی‌که مصاحبه فاطمه در سطح ۴ نشان داد سطوح این طبقه‌بندی لزوماً سلسه‌مراتبی نیستند.

در سطح اول طبقه‌بندی، به مشکلاتی اشاره شد که شرکت‌کنندگان این پژوهش در خواندن و درک مطلب داشتند. انجمن بین‌المللی ارزیابی پیشرفت تحصیلی[1]، توانایی درک و استفاده از قالب‌های زبان نوشتاری مورد نیاز جامعه یا ارزشمند برای فرد را سواد خواندن[2] تعریف می‌کند (Mullis & Martin, 2019). نتایج مطالعه پرلز[3] ۲۰۲۱ نشان می‌دهد مانند دوره‌های گذشته، عملکرد دانش‌آموزان ایرانی در مقایسه با اغلب همتایان خود در دیگر کشورها مطلوب نیست؛ در بین ۵۷ کشور، دوسوم به بالای نقطه وسط مقیاس پرلز رسیدند و ایران پایین‌تر از نقطه وسط مقیاس، در جایگاه ۵۳ام است (Kabiri, 2023).[4]

1.International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA)
2.Reading literacy

۳. مطالعهٔ پرلز از سال ۲۰۰۱، هر پنج سال یک بار با هدف سنجش پیشرفت سواد خواندن دانش‌آموزان پایهٔ چهارم اجرا می‌شود.

۴. به تجربهٔ نگارندهٔ این سطور، مشکلات خواندن و درک مطلب تا دورهٔ متوسطه دوم و بعضاً دانشگاه ادامه دارد و موجب افت عملکرد یادگیرندگان می‌شود.

نکته دیگری که در سطح اول طبقه‌بندی به آن اشاره شد درمورد اشتباه در رسم زاویه خارجی بود؛ زمانی که برخی از دانش‌آموزان در مثال اولیه خود از مثلث و مربع، زاویه خارجی را به‌درستی مشخص می‌کردند ولی در شکل استدلال ج، C_2 را به‌عنوان زاویه خارجی در نظر می‌گرفتند. این دو بازنمایی ناسازگار که به‌طور هم‌زمان در ذهن دانش‌آموز وجود داشت و در پاسخ به یک سؤال ارائه می‌شد، احتمالاً در دو فرایند فکری متفاوت از هم به دست آمده بودند، درحالی‌که دانش‌آموز از آن ناهماهنگی مطلع نبود. عملکرد شرکت‌کنندگان هنگام آگاهی از وجود این تعارض شناختی در ساختار فکریشان، مطابق با دیدگاه Piaget (1950) و Lakatos (1976) بود. دانش‌آموزان تلاش می‌کردند ناهماهنگی‌ها را حذف کنند؛ آن‌ها با سعی در به خاطر آوردن تعریف صحیح زاویه خارجی، استنباط از مشخصه‌های چندضلعی‌ها، پیدا کردن خطا در استدلال‌های ب و ج، تکیه‌گاه‌های قابل اطمینانی برای خود پیدا کرده و گزاره‌های متناقض با آن‌ها را حذف می‌کردند و به‌این‌ترتیب، ساختار همگنی از موضوع به دست می‌آورند. هر چند که گاهی مثلاً با در نظر گرفتن تعریف نادرستی از زاویه خارجی، ساختار به دست آمده اشتباه بود، ولی به هر حال در ساختار مورد بررسی آن‌ها در آن زمان تناقضی وجود نداشت. ازآنجاکه این موضوع تمرکز این پژوهش نبوده و نیاز به شواهد بیشتری برای نتیجه‌گیری‌های دقیق‌تر است، پیشنهاد می‌شود در مطالعه کیفی دیگری، برداشت دانش‌آموزان از چنین تناقض و تعارض شناختی‌ای، عمیق‌تر بررسی شود و عملکرد آن‌ها بعد از آگاهی نسبت به وجود این ناهماهنگی‌ها با جزئیات ثبت و تشریح شود.

خطاهایی که دانش‌آموزان حین ریاضی‌ورزی مرتکب می‌شوند، ارزش آموزشی بالایی دارند و می‌توانند فرصت‌های یادگیری معنادار ایجاد کنند؛ خطاها گسترده‌اند و حتی مواردی مانند فرضیات و تعاریف بررسی نشده، تناقض‌ها، نتایج متضاد یا نتایجی که منطقی نیستند، می‌توانند نقطه شروع درستی برای ریاضی‌ورزی معنادار محسوب شوند (Borasi, 1996, as cited in Komatsu, 2010). بنابراین برای دستیابی دانش‌آموزان به این تجربیات ارزشمندِ یادگیری، شایسته است معلمان ریاضی آمادگی لازم را در برخورد صحیح با این خطاها داشته باشند و از آن‌ها بهره حداکثری ببرند؛ ضمناً خود نیز در قالب تکالیفی خوب فکر شده، فرصت‌هایی برای دانش‌آموزان فراهم کنند که فضاهای مثال خود را با دقت وارسی نموده و حتی آن‌ها را گسترش دهند تا تناقض‌های احتمالی در ساختار فکری آن‌ها، مشخص و برطرف شود. اهمیت و ارزش

این تلاش معلمان زمانی بیشتر نمایان می‌شود که بدانیم تحلیل محتوای کتاب‌های درسی ریاضی در پایه‌های هفتم، هشتم و نهم توسط Dorri, Rafiepour, & Dorri, (2019) نشان می‌دهد سؤالات هر سه کتاب عمدتاً در طبقات «تکرار» و «تمرین» با «پیچیدگیِ رویه‌ای پایین» قرار گرفتند که با استفاده از رویه‌های از قبل آموخته شده قابل حل هستند و در این حالت برای حل این تمرین‌ها نیازی به داشتن ساختارهای منسجم و سازمان‌یافته از مفاهیم نیست.

باید مراقب بود که صرفاً با ارائه مثال‌های از پیش‌آماده‌ای در کتاب درسی و کلاس درس، فرصت‌های یادگیری دانش‌آموزان محدود نشود. درگیر کردن دانش‌آموزان با فعالیت‌هایی که شامل استفاده از انواع «مثال»ها هستند، درحالی‌که دانش‌آموزان را با مفاهیم جدید آشنا می‌کند، می‌تواند استراتژی تولید مثال را ارتقاء دهد و دانش‌آموزان را تشویق کند تا معنای تعاریف را با دقت بیشتری در نظر گیرند (Dahlberg & Housman, 1997; Selden & Selden, 1998). همچنین Komatsu et al. (2017) اذعان می‌کنند تکالیفی که مستلزم کشف مثال‌های نقض توسط دانش‌آموزان هستند، می‌توانند به آن‌ها در بهبود یادگیریشان از اثبات و اثبات کردن کمک کنند. این در حالی است که تحلیل محتوای کتاب‌های درسی ریاضی هفتم و هشتم نشان می‌دهد تعداد این فعالیت‌ها در هر دو کتاب اندک است و به تنها دو مورد در کتاب هفتم و پنج مورد در کتاب هشتم (Ahmadpour, 2018) محدود است، درحالی که با توجه به نتایج مطالعه حاضر، توجه بیشتر به این «مثال‌ها» در کتاب‌های درسی ریاضی لازم است.

Referrences

Ahmadpour, F., Fadaei, M., & Rafiepour, A. (2017). The necessity of rethinking in the content of 7th and 8th grades mathematics textbooks from the aspect of reasoning and proof. Journal of Curriculum Studies, 12 (46), 59-84. (In Farsi.)

Ahmadpour, F. (2018). Proof in the first two years of middle school (Unpublished Doctoral Dissertation in Mathematics). Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman. (In Farsi.)

Alcock, L., & Inglis, M. (2008). Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures. Educational Studies in Mathematics, 69, 111–129.

Amiri, H., Pandi, Z., Khosroabadi, H., Davoodi, K., Reyhani, E., Seyedsalehi, M., & Sadr, M. (2024). Mathematics for eighth grade, middle school (11th ed.). Tehran: Iranian Textbook Publishing Company. (In Farsi.)

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), Mathematics, Teachers and Children, 216–235. Hodder and Stoughton, London.

Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. In E. von Glasersfeld, (Ed.), Radical constructivism in mathematics education (pp. 89–110). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In J. Novotna (Ed.), Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Prague, Czech Republic: PME.

Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2011). Is this a coincidence? The role of examples in fostering a need for proof. ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 43(2), 269–281.

Buchbinder, O., & Zazkis, R. (2024). On Convincing Power of Counterexamples. The Mathematics Enthusiast, 21(1), 443-458.

Dahlberg, R.P. & Housman, D.L. (1997). Facilitating learning events through example generation. Educational Studies in Mathematics, 33, 283-299.

Dorri, M. M., Rafiepour, A. & Dorri, F. (2019). The capacity of junior secondary math textbooks to enhance deep learning. Journal of Curriculum Studies, 14 (52), 1-30. (In Farsi.)

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. For the Learning of Mathematics, 3(2) 9_18, 24.

Flick, U. (1998). An introduction to qualitative research (H. Jalili, Trans.; 2nd ed., 2009). Tehran: Nashr Ney. (In Farsi.)

Gall, M., Borg, W., & Gall, J. (1996). Quantitative and qualitative research methods in educational sciences and psychology (A. Nasr et al., Trans., 5th ed., 2006). Tehran: Samt Publications. (In Farsi.)

Kabiri, M. (2023). Summary report of the findings of the PIRLS 2021 study. National TIMSS and PIRLS Studies Center, Tehran. (In Farsi.)

Klymchuk, S. (2012). Using counter-examples in teaching and learning of calculus: Students' attitudes and performance. Mathematics Teaching Research Journal Online, 5(4), 5-30.

Ko, Y. Y., & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. The Journal of Mathematical Behavior, 28(1), 68–77.

Komatsu, K. (2010). Counter-examples for refinement of conjectures and proofs in primary school mathematics. The Journal of Mathematical Behavior, 29(1), 1–10.

Komatsu, K. (2016). A framework for proofs and refutations in school mathematics: Increasing content by deductive guessing. Educational Studies in Mathematics, 92(2), 147–162.

Komatsu, K., & Jones, K. (2022). Generating mathematical knowledge in the classroom through proof, refutation, and abductive reasoning. Educational Studies in Mathematics, 109, 567–59.

Komatsu, K., Jones, K., Ikeda, T., & Narazaki, A. (2017). Proof validation and modification in secondary school geometry. The Journal of Mathematical Behavior, 47, 1–15.

Lakatos, I. (1976). Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery. Cambridge: Cambridge University Press.

Larsen, S., & Zandieh, M. (2008). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics, 67(3), 205–216.

Lee, K. (2016). Students' proof schemes for mathematical proving and disproving of propositions. The Journal of Mathematical Behavior, 41, 26–44.

Marton, F. (1981). Phenomenography—describing conceptions of the world around us. Instructional Science, 10, 177-200.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. Educational Studies in Mathematics, 15, 227-289.

Mullis, I. V., & Martin, M. O. (2019). PIRLS 2021 Assessment Frameworks. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The Netherlands.

Peled, I., & Zaslavsky, O. (1997). Counter-examples that (only) prove and counter-examples that (also) explain. FOCUS on Learning Problems in Mathematics, 19(3), 49–61.

Piaget, J. (1950). The psychology of intelligence. Translated from French by Malcolm Piercy & D. E. Berlyne. London & New York: Routledge.

Pinto, A., & Cooper, J. (2023). "This cannot be"-refutation feedback and its potential affordances for proof comprehension. Educational Studies in Mathematics, 113, 287–306.

Reid, D. A. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 33(1), 5–29.

Reyhani, E., Hamidi, F., & Kolahdouz, F. (2012). Investigating second-year high school students' understanding of mathematical reasoning and proof. Journal of Curriculum Studies, 6 (24), 157-182. (In Farsi.)

Selden, A., & Selden J. (1998). The role of examples in learning mathematics. The Mathematical Association of America Online. Retrieved on August, 1, 2023 from http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_5.html

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques (B. Mohammadi, Trans.; 2011). Tehran: Institute for Humanities and Cultural Studies. (In Farsi.)

Stylianides, A. J., & Al-Murani, T. (2010). Can a proof and a counterexample coexist? Students' conceptions about the relationship between proof and refutation. Research in Mathematics Education, 12(1), 21-36.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, 3-21. Kluwer: Dordrecht.

Waxer, M., Morton, J.B. (2012). Cognitive conflict and learning. In N.M., Seel (Ed.), Encyclopedia of the Sciences of Learning. Springer, Boston, MA.

Weber, K. (2009). How syntactic reasoners can develop understanding, evaluate conjectures, and generate counterexamples in advanced mathematics. The Journal of Mathematical Behavior, 28(2–3), 200-208.

Yopp, D. A. (2020). Eliminating counterexamples: An intervention for improving adolescents' contrapositive reasoning. Journal of Mathematical Behavior, 59, 100794.

Yopp, D. A., Ely, R., Adams, A. E., Nielsen, A. W., & Corwine, E. C. (2020). Eliminating counterexamples: A case study intervention for improving adolescents' ability to critique direct arguments. Journal of Mathematical Behavior, 57, 100751.

Zaslavsky, O. & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: The case of binary operation. Journal for Research in Mathematics Education, 27(1), 67-78.

Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. Journal for Research in Mathematics Education, 36(4), 317–346.

Zazkis, R., & Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary? Educational Studies in Mathematics, 68(3), 195–208.