فصلنامه مطالعات برنامه درسی ایران
سال دوازدهم، شماره ۴۶، پاییز ۱۳۹۶، ۸۴ – ۵۹

Journal of Curriculum Studies (J. C. S)
Vol. 12 (46); 2017, 59-84

لزوم بازاندیشی در محتوای کتاب‌های درسی ریاضی پایه هفتم و هشتم از منظر استدلال و اثبات

The Necessity of Rethinking in the Content of 7th and 8th Grades Mathematics Textbooks from the Aspect of Reasoning and Proof

تاریخ دریافت مقاله: ۲۰ /۱۳۹۶/۰۱؛ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۶ /۱۳۹۶/۰۸

فاطمه احمدپور[۱]
محمدرضا فدائی[۲]
ابوالفضل رفیع پور[۳]

چکیده: تصدیق یک گزاره ریاضی، عموماً برای دانش‌آموزان مشکل است؛ آن‌ها حتی بسیاری از مواقع، لزوم آن را درک نمی‌کنند. پیچیدگی‌هایی که در ماهیت ارزشمند استدلال و اثبات پنهان شده، اهمیتِ نحوه‌ی ارائه‌ی آن‌ها را در کتب درسی، بیشتر مشخص می‌کند. هدف از این مطالعه، تعیین میزان حضور انواع استدلال، به‌خصوص استدلال استنتاجی در کتاب‌های درسی ریاضی پایه‌های هفتم و هشتم می‌باشد. به این منظور از روش تحلیل محتوا استفاده شده است. نتایج به دست آمده حاکی از آن است که بیشترین میزان استدلال، از جمله انواع سطوح استنتاج موجود در کتاب‌ها، در محتوای هندسی دیده می‌شود؛ البته استثناهای غیرمنتظره‌ای هم وجود دارد. در مجموع توزیع استدلال استنتاجی در فصول کتاب هفتم و هشتم یک دست و یکنواخت نیست، ولی فقر استنتاج در بیشتر فصل‌های مربوط به محتوای حساب و آمار و احتمالات دیده می‌شود. بعلاوه، برخلاف انتظار میزان استدلال‌های آزمایشی در کتاب هشتم، نه تنها کاسته نشده بلکه نسبت به کتاب هفتم حدود دو برابر است. در انتهای نوشتار حاضر، در مورد ملاحظاتی که برای تغییر تمرکز از استدلال استقرایی به استنتاجی باید در نظر گرفته شود، بحث می‌شود.

کلیدواژه‌ها: استدلال ریاضی، اثبات، تحلیل محتوا، کتاب درسی، پایه‌های هفتم و هشتم تحصیلی.

F. Ahmadpour
M. Fadaei (Ph. D)
A. Rafiepour (Ph. D)

Abstract: The verification of a mathematical statement is normally difficult for students; and they often face difficulty realizing its relevance and necessity. The hidden complexities in the valuable nature of reasoning and proof signal to the significance of the way of presenting them in textbooks. The aim of this study is to determine the role of reasoning, especially deductive reasoning in 7^{th} and 8^{th} grades mathematics textbooks which was fulfilled though a content analysis method. The results show that the highest amount of reasoning, including different kinds of deduction, is allocated to the geometric content, although unexpected findings are obtained as well. Generally speaking, deductive reasoning has not been distributed uniformly in the chapters of mathematics textbooks under study. The deficiency of deduction could be observed in many chapters related to arithmetic, probability and statistics. In addition, the experimental argumentation has been increased by two times surprisingly in the 8^{th} grade textbook compared to that of 7^{th} grade. At the end of the paper, some considerations are discussed that should be taken into account when addressing the shift of attention from inductive to deductive reasoning in these grades.

Keywords: mathematical reasoning, proof, content analysis, textbook, 7^{th} and 8^{th} grades

---

۱. دانشجوی دکتری آموزش ریاضی دانشگاه شهید باهنر کرمان، f.ahmadpour.86@gmail.com
۲. دانشیار دانشگاه شهید باهنر کرمان (نویسنده مسؤل)، fadaee_mr@yahoo.com
۳. دانشیار دانشگاه شهید باهنر کرمان، drafiepour@gmail.com

مقدمه

کتاب درسی یکی از ابزارهای مهم آموزشی می‌باشد که نقش یک رابط را بین سیاست‌گذاران آموزشی و مجریان ایفا می‌کند. کتاب درسی، یک عامل اساسی در تعیینِ محتوایِ دروس ریاضی و فعالیت‌های معلمان و دانش‌آموزان در کلاس درس است. در تیمز ۲۰۰۳، ۶۸ درصد و در تیمز ۲۰۰۷، ۱۰۰ درصد معلمان ایرانی شرکت کننده، اذعان کردند که در حین تدریس ریاضی، از کتاب درسی استفاده می‌کنند (مولیز[1] و همکاران، ۲۰۰۸). در سال‌های اخیر، به دنبال تغییر و تألیف مجدد کتاب‌های درسی ریاضی، کنکاش و تحقیق در مورد جنبه‌های مختلف آن‌ها ضروری‌تر از گذشته به نظر می‌رسد. از سؤالاتی که می‌توان مطرح نمود این است که آیا محتوای انتخاب شده و نحوه‌ی ارائه آن بر مبنای اهداف و برنامه قصد شده هستند؟

یکی از اهداف کلاس درس ریاضی، کمک به دانش‌آموزان در درک ماهیت ریاضی است. ریاضی بر پایه اصول موضوعه، مفاهیم اولیه و تعاریف و با کمک استدلال منطقی بنا شده و برخلاف عقیده رایج نباید ریاضی را مجموعه‌ای از اشیاء ریاضی یا قوانین حساب و هندسه تصور نمود. در نگاشت سوم سند برنامه درسی ملی نیز، به نقش و لزوم وجود «استدلال منطقی در قلمرو حوزه آموزش ریاضی» اشاره می‌شود (دبیرخانه طرح تولید برنامه درسی، ۱۳۸۹، ص ۹۷). هم‌چنین یکی از اهداف قصد شده در تغییر محتوای کتاب ریاضی هفتم، محوریت استدلال و اثبات می‌باشد. در این رابطه عالمیان (۱۳۹۲) اظهار کرد: «مهم‌ترین رویکرد تغییر محتوای آموزشی کتاب ریاضی هفتم، توجه به استدلال، اثبات و درک مفاهیم در حل مسئله و محیط زندگی دانش‌آموزان است». در اصول و استانداردها برای ریاضیات مدرسه‌ای (۲۰۰۰) نیز آمده:

> نگاه دانش‌آموزان به ریاضیات در دوره راهنمایی باید شامل بررسی الگوها و توجه به نظم‌ها، حدسیه‌سازی در مورد تعمیم‌های ممکن و ارزیابی حدسیه‌ها باشد. در پایه‌های شش تا هشت، دانش‌آموزان باید با عمق بخشیدن به ارزیابی‌های خود، با استفاده از

1. Mullis

استدلال استقرایی و استنتاجی، مهارت‌های استدلالی خود را گسترش دهند (شورای ملی معلمان ریاضی[1] امریکا، ۲۰۰۰، ص ۲۶۲).

استدلال استنتاجی نه تنها در تأیید یا رد یک گزاره می‌تواند بکار گرفته شود، بلکه نقش‌های دیگری نیز می‌تواند بازی کند. گاه می‌تواند یک گزاره را توضیح دهد و بنابراین به درک آن کمک کند (هنا[2]، ۲۰۱۴)؛ هم‌چنین استدلال استنتاجی می‌تواند به کشف یک حقیقت جدید منجر شود (شونفیلد[3]، ۱۹۸۵؛ رببد و کنیپینگ[4]، ۲۰۱۰). باوجود چنین جایگاهی، برنامه‌های درسی ریاضی، در رسیدن به پتانسیل‌های آموزشی اثبات شکست خورده‌اند (هنا، ۲۰۱۴) و دانش‌آموزان مشکلات جدی در درک و انجام آن‌ها دارند (هارل و سودر[5]، ۱۹۹۸؛ هیلی و هویلز[6]، ۲۰۰۰؛ رببد و کنیپینگ، ۲۰۱۰؛ بویل[7] و همکاران، ۲۰۱۵؛ باقری، ۱۳۸۸، ریحانی، حمیدی و کلاهدوز، ۱۳۹۱). حتی به‌وفور دیده می‌شود که دانش‌آموزان میان اعتبار استدلال استنتاجی و دیگر انواع استدلال، تفاوتی قائل نمی‌شوند و نمی‌دانند که استدلال استنتاجی تنها نوع استدلال است که قطعیت به همراه دارد (هارل و سودر، ۱۹۹۸؛ رببد و کنیپینگ، ۲۰۱۰). برای بسیاری از دانش‌آموزان نیز تشریفاتی فاقد معناست که اگر مجبور شوند آن را طبق یک الگوی معین یا فقط با نمادها بنویسند، این دیدگاه تقویت هم می‌شود (بال[8] و همکاران، ۲۰۰۲).

برای بهبود وضعیت موجود، توجه به عوامل متعددی از جمله اصلاح محتوای کتاب درسی لازم است. غنای کتاب از لحاظ ارائه گزاره‌های مستدل و فراهم نمودن تکالیف متنوع و مناسب، عامل مهمی در پرورش مهارت استدلالی دانش‌آموزان دارد. هدف از این مطالعه، بررسی میزان حضور انواع استدلال، به‌خصوص استدلال استنتاجی، در کتاب‌های درسی

---

1. National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]
2. Hanna
3. Schoenfeld
4. Reid and Knipping
5. Harel and Sowder
6. Healy and Hoyles
7. Boyle
8. Ball

ریاضی پایه‌های هفتم و هشتم است. سؤالاتی که نویسندگان این مقاله درصدد پاسخ به آن‌ها هستند:

۱. در کتاب‌های ریاضی پایه هفتم و هشتم، کدام یک از انواع استدلال ارائه شده است؟
۲. فراوانی و توزیع انواع استدلال در فصل‌های این دو کتاب چگونه است؟
۳. چند درصد از محتوای کتاب‌های مذکور به اثبات یک گزاره، اختصاص یافته است؟

چارچوب نظری و پیشینه پژوهشی

۱- سطوح مختلف استدلال و اثبات در آموزش ریاضی

تا به حال تحقیقات پژوهشی درخور توجهی در مورد سطوح مختلف استدلال و اثبات در آموزش ریاضی انجام شده است. از جمله سطوح استیسی و وینسنت[1] (۲۰۰۹) که با تعدیل و توسیع طبقه‌بندی‌های گذشته، هفت نوع استدلال را در کتاب‌های درسی ریاضی پایه هشتم استرالیا شناسایی نمودند. نتایج مطالعه آن‌ها، در مقایسه‌ی تحقیقاتِ برجستهِ قبلی (بلوم و کیرش[2]، ۱۹۹۱؛ سیرپینسکا[3]، ۱۹۹۴؛ هارل و سودر، ۱۹۹۸) خلاصه مناسبی برای خوانندگان فراهم می‌کند (جدول شماره ۱ را ملاحظه کنید). در ادامه به تشریح و توضیح جدول ۱ می‌پردازیم.

اطمینان از درستی یک گزاره، گاهی به این دلیل است که یک مرجع دارای صلاحیت، درستی آن را تأیید کرده باشد. در این حالت، اطمینان از درون شخص برنخاسته، بلکه از بیرون بر او تحمیل شده است. هارل و سودر (۱۹۹۸) این حالت را *اطمینان بیرونی*[4] می‌نامند که معادل سطح *ارجاع به مرجع قدرت*[5] در چارچوب استیسی و وینسنت (۲۰۰۹) است.

1. Stacey and Vincent
2. Blum and Kirsch
3. Sierpinska
4. External Conviction
5. Appeal to authority

جدول ۱: هم‌ترازی طبقه‌بندی‌های مختلف از استدلال (استیسی و وینسنت، ۲۰۰۹)

سطوح اثبات بلوم و کیرش (۱۹۹۱)	**انواع توضیح** سیرپینسکا (۱۹۹۴)	**طبقه‌بندی طرح‌واره‌های اثبات** هارل و سودر (۱۹۹۸)	**انواع استدلال** استیسی و وینسنت (۲۰۰۹)
		اطمینان بیرونی	استناد به مرجع قدرت
	توضیح آموزشی		قیاس کیفی
اثبات آزمایشی		اثبات تجربی	هماهنگی قانون با مدل
			نمایش آزمایشی
اثبات ماقبل صوری		اثبات استنتاجی	استنتاج با استفاده از مدل
			استنتاج با استفاده از یک حالت خاص
			استنتاج با استفاده از یک حالت کلی
اثبات صوری	توضیح علمی		

سیرپینسکا (۱۹۹۴) نیز دو سطح فرایند استدلال را از یکدیگر تمیز داد: *توضیحات آموزشی و توضیحات علمی*[1]. وی به نقش توضیحات در درک و فهم ریاضی تأکید داشت و تصریح نمود مثال، مدل، تصویر و ابزار دیگر می‌توانند به این منظور کمک کننده باشد. او معتقد بود علیرغم اینکه اثبات ریاضی (توضیح علمی) جامعه ریاضی را راضی می‌کند، اما در مدرسه اغلب، توضیحات آموزشی لازم است. استیسی و وینسنت (۲۰۰۹) معادل توضیحات آموزشی، شش سطح استدلال را در سه دسته اصلی شناسایی می‌کنند. اولین دسته مربوط به *قیاس کیفی*[2] است که در استدلال ارائه شده تنها یک شباهت ظاهری میان گزاره مورد نظر و یک موقعیت غیر ریاضی آشنا برای دانش‌آموز برقرار می‌شود. در بخش نتایج این مقاله، برای توضیح و تشریح آن مثال آورده می‌شود. دسته دوم شامل دو زیر دسته *هماهنگی قانون با مدل*[3] و *نمایش آزمایشی*[4] در جدول شماره ۱ آمده‌اند، آن‌ها استدلال‌های استقرایی هستند که معادل با

1. Didactic explanations and Scientific explanations
2. Qualitative analogy
3. Concordance of a rule with a model
4. Experimental demonstration

اثبات‌های آزمایشی (بلوم و کیرش، ۱۹۹۱)/ تجربی (هارل و سودر، ۱۹۹۸) می‌باشند. در این حالت گزاره‌ها با حقایق فیزیکی یا تجارب حسی در قالب یک یا چند مورد خاص اعتباریابی می‌شوند (هارل و سودر، ۱۹۹۸). دسته سوم استدلال‌های استنتاجی غیرصوری هستند که معادل *اثبات‌های ماقبل صوری*[1] در طبقه‌بندی بلوم و کیرش (۱۹۹۱) است. اثبات ماقبل صوری «زنجیره‌ای درست اما غیرصوری از نتایج است که به فرضیه‌های معتبرِ غیرصوری استناد می‌کند» (بلوم و کیرش، ۱۹۹۱، ص ۱۸۷).

هارل و سودر (۱۹۹۸) اثبات کردن را فرایندی می‌دانند که فرد (جمعی) برای برطرف کردن شک و تردید از درستی یک گزاره بکار می‌گیرد. بخش اعظمی از محققان متأخرِ فلسفه ریاضیات، تصوری صورت‌گرایانه از فرایند اثبات دارند که عبارت است از «دنباله‌ای متناهی از فرمول‌ها یا گزاره‌های یک دستگاه داده شده‌ی معین، به طوری که هر یک از گزاره‌های این دنباله، یا اصل موضوع دستگاه باشند یا به کمک یکی از قواعد دستگاه از چند گزاره قبلی استنتاج شده باشند» (لاکاتوش، ۱۹۷۸، ص ۲۵۶). این همان اثبات صوری (بلوم و کیرش، ۱۹۹۱) یا به تعبیر سیرپینسکا (۱۹۹۴) توضیح علمی است (جدول ۱ را ملاحظه نمایید).

به طور خلاصه، در مقایسه سطوح مختلف استدلال و اثبات می‌توان گفت اگر استدلال استقرایی بکار گرفته شود، اثبات به دست آمده تجربی/آزمایشی خواهد بود و در صورتی که استدلال به روش استنتاجی باشد، اثبات حاصل، استنتاجی است و قطعیت دارد.

۲- استدلال و اثبات در کتاب‌های درسی

محتوای کتاب درسی می‌تواند تأثیر مستقیمی بر کیفیت آموزشی کلاس درس داشته باشد. در مطالعه ویدئویی تیمز (۱۹۹۹) کلاس‌های ریاضی و علوم پایه هشتم هفت کشور جهان ازجمله استرالیا از جنبه‌های مختلف مورد تحلیل قرار گرفتند (وینسنت، استیسی، ۲۰۰۸). نتایج تحلیل حاکی از پایین بودن پیچیدگی در روند حل مسائل، نسبت بالای مسائل تکراری و فقدان استدلال ریاضی در گفت‌وگوهای کلاسی بود. وینسنت و استیسی (۲۰۰۸) اصطلاح «نشانگان

1. Per-formal proof

(سندرم) تدریس سطحی[1]» را برای عملکرد کلاس‌های درس ریاضی در این کشور به کار بردند. با تحلیل کتاب‌های درسی پرفروش در چهار ایالت استرالیا، مشابهت بالایی میان مشخصه‌های کتاب درسی و مطالعه ویدئویی کلاس‌های ریاضی استرالیا به دست آمد. در سال ۲۰۰۹، پژوهشی دیگر از این دو محقق نشان داد بیشتر کتاب‌های درسی هشتم در استرالیا به جای «ارائه قوانین بدون دلیل» توضیحاتی ارائه شده است، اما هدف اصلی استفاده از این توضیحات به جای اینکه «ابزاری برای تفکر» باشد، این است که قوانینی برای تمرین‌ها به دست آوردند. کتاب‌های درسی، عموماً میان اعتبار استدلال استنتاجی و دیگر انواع استدلال تفاوتی قائل نمی‌شوند (استیسی و وینسنت، ۲۰۰۹).

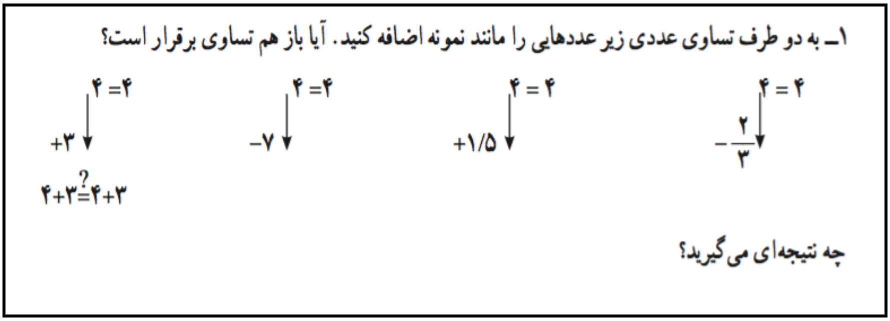
به طور سنتی، هندسه محمل اثبات بوده است (هارل و سودر، ۱۹۹۸) ولی سؤالی که مطرح می‌شود این است که نقش فرایند اثبات تا چه میزان در یادگیری و درک دیگر موضوعات از جمله حساب، جبر، آمار و احتمال در کتاب درسی پررنگ است. در امریکا ۲۰ کتاب درسی دوره دبیرستان در موضوعات تابع‌نمایی، لگاریتم و چندجمله‌ای‌ها از لحاظ ماهیت و میزان استدلال و اثبات بررسی شدند (تامپسون، سنک و جانسون[2]، ۲۰۱۲). نتایج نشان داد میزان استدلال‌های اثبات-محور[3] در عناوین و کتاب‌های مختلف متغیر بود. روی هم رفته نیز، حدود ۵۰ درصد از قوانین و گزاره‌های شناسایی شده تصدیق و توجیه شده بودند _حدود ۳۰ درصد به‌وسیله استدلال کلی[4] و حدود ۲۰ درصد به‌وسیله استدلال خاص[5]. لازم به ذکر است استدلال کلی، گزاره مورد نظر را در حالت کلی و عمومی ثابت می‌کند، اما استدلال خاص، گزاره مورد نظر را به ازای مجموعه‌ای از موارد خاص و محدود اثبات می‌کند.

1. Shallow teaching syndrome
2. Thompson, Senk, Johnson
3. Proof-related reasoning
4. General argument
5. Specific argument

روش‌شناسی

تحلیل محتوا از روش‌هایی است که اطلاعات زیادی در مورد «انتخاب و ارائه‌ی محتوای ریاضی» در کتاب درسی به ما می‌دهد (کیلپاتریک[1]، ۲۰۱۴). در این مطالعه با استفاده از تحلیل محتوا، کتاب‌های درسی ریاضی پایه هفتم و هشتم دوره اول متوسطه تحصیلی چاپ سال ۱۳۹۳ بررسی گردید. مراحل تحلیل محتوا به روش کریپندورف[2] (۲۰۰۴) و بر اساس چارچوب نظری استیسی و وینسنت (۲۰۰۹) آغاز و در نهایت به جرح و تعدیل چارچوب نظری نیز منجر شد. چارچوب تعدیل شده دارای هشت دسته است و در بخش بعد به تفصیل تشریح می‌شود.

ساختار کتاب‌های تحلیل شده در این مطالعه از مسائلی تشکیل شده‌اند که در قالب فعالیت، کار در کلاس و تمرین آمده‌اند و هم‌چنین گاهی، کادرهای توضیحی کوتاهی در متن ظاهر می‌شوند که شامل یک تعریف، قرارداد یا جمع‌بندی درس هستند؛ بنابراین هر یک از مسائل و کادرها به‌عنوان یک واحد تحلیل انتخاب شد. برای مثال مسئله زیر یک واحد تحلیل است.



شکل ۱: مثالی از یک واحد تحلیل (کتاب ریاضی هفتم، صفحه ۳۸)

تعداد کل واحدهای تحلیل ۱۰۹۲ مورد (۵۳۵ واحد تحلیل از کتاب هفتم، ۵۵۷ واحد تحلیل از کتاب هشتم) است. همه واحدها در تحلیل‌ها شمرده شدند؛ اما آن‌هایی که اثبات محور

1. Kilpatrick
2. Krippendorff

بودند – یا به عبارت دیگر، برای تصدیق یا توضیحِ یک گزاره در این واحد، زنجیره استدلالی خواسته یا آورده شده بود– با استفاده از کدهای موجود، برچسب‌گذاری شدند. هر یک از هشت دسته‌ی چارچوب نظری تعدیل یافته، به‌عنوان یک کد در نظر گرفته شد. در روند کدگذاری، استدلال‌های مکانیکی[1] برچسب‌گذاری نشدند. منظور از استدلال‌های مکانیکی آن‌هایی هستند که با استفاده از فرمول‌ها، نمادها یا مکانیزم‌هایی بر پایه اصول استنتاجی، نتیجه‌گیری می‌شود، ولی نحوه کار این اصول در پس مجموعه‌ای از قوانین مکانیکی پنهان است (ریید و کنیپینگ، ۲۰۱۰). برای مثال وقتی دست ورزی‌های جبری، بدون توجه به ساختارهای جبریِ پنهان در آن انجام شود، مانند کاری است که نرم افراز جئوجبرا یا متلب[2] انجام می‌دهد.

به منظور اطمینان از اعتبار کدگذاری، به استناد گال، بورگ و گال (۱۹۹۶) محقق دیگری در مورد روند کدگذاری و چارچوب نظری این مطالعه، آموزش دید و بیش از ۲۸ درصد از واحدهای تحلیل به صورت تصادفی انتخاب و کدگذاری مجدد شد. میزان موافقت به‌دست آمده میان کدگذاران، ۸۹ درصد بود که اعتبار لازم را فراهم می‌کند. بر سر موارد اختلاف نیز، با بحث در مورد چارچوب نظری و محتوای درس، در نهایت توافق حاصل گردید.

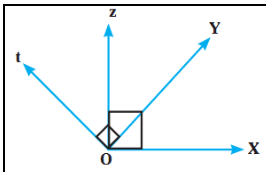
یافته‌ها: پاسخ به سؤال‌های پژوهش

۱- تعدیل چارچوب نظری

فرایند کدگذاری برای یافتن انواع استدلال‌های مطرح شده در کتاب، طبق طبقه‌بندی استیسی و وینست (۲۰۰۹) آغاز شد. در حین کدگذاری دسته مهمی از سؤالات شناسایی شدند که از دانش‌آموز خواسته می‌شود، درستی یک گزاره، به شیوه‌ای استنتاجی ولی در موردی خاص بررسی کند. این نوع استدلال در طبقه‌بندی استیسی و وینست غایب است، ما آن را «استنتاجِ با استفاده از یک مثال» نامیدیم. این دسته شامل مثال‌های نقض و اثبات‌های خاص[3] می‌شود. از

1. Mechanical reasoning
2. Geogebra or Matlab
3. Specific proofs

آنجا که خواننده با مثال نقض آشنایی کافی دارد، به مثالی از یک اثبات خاص اکتفا می‌کنیم (شکل شماره ۲ را ببینید):



۳ـ در شکل مقابل می‌دانیم زاویه‌های $x\hat{O}z$ و $t\hat{O}y$، 90° هستند.
چگونه می‌توانید نتیجه بگیرید که زاویه‌های $t\hat{O}z$ و $x\hat{O}y$ مساوی‌اند؟

شکل شماره ۲: مثالی از یک اثبات خاص (کتاب ریاضی هفتم، صفحه ۴۷)

هدف مؤلفان کتاب، آوردن یک استدلال استنتاجی از طرف دانش‌آموزان بوده است؛ استدلالی که رید و کنیپینگ (۲۰۱۰) آن را اثبات خاص می‌نامند. اثباتی که درستی یک گزاره‌ی خاص را تأیید می‌کند. این مسائل می‌توانند زمینه‌ساز ورود به استدلال استنتاجی در حالت کلی باشند. در این حالت اغلب اعداد می‌توانند با متغیرها جایگزین شوند و مقدمه‌ی شکل‌گیری *اثبات عام*[1] را برای گزاره در حالت کلی فراهم نمایند؛ بنابراین ارزش آموزشی بالایی در این دوره سنی دارند (دانش‌آموزان دوازده و سیزده ساله). در اثبات عام، درستی گزاره مورد نظر در یک مثال عام استنتاج می‌گردد. این مثال، یک کلاس را نمایندگی می‌کند و در اصطلاح به آن، *مثال عام* می‌گویند. در ادامه به توضیح هر یک از انواع استدلال و مثال‌های آن‌ها در کتاب درسی می‌پردازیم.

۲- انواع استدلال بکار رفته در کتاب درسی

سؤال اول در مورد انواع استدلال‌های مطرح شده در کتاب‌های درسی ریاضی پایه هفتم و هشتم می‌پرسد. در پاسخ به آن باید گفت از میان انواع استدلال، به‌جز دو حالت «قیاس کیفی»

1. Generic proof

و «هماهنگی قانون با مدل» دیگر انواع استدلال در کتاب‌های ریاضی هفتم و هشتم دیده شدند. برای اطلاع بیشتر خواننده مثال‌هایی از هر یک فراهم شده است:

۱. ارجاع به مرجع قدرت: زمانی که گزاره‌ای بدون توجیه و استدلال ریاضی به دانش‌آموزان ارائه شود، اطمینان از درستی آن، به یک مرجع دارای صلاحیت ارجاع داده می‌شود. در کتاب هفتم، در مبحث جمع و تفریق اعداد صحیح، از دانش‌آموزان خواسته شده که درستی محاسبات خود را با ماشین حساب بررسی نمایند (کتاب ریاضی هفتم، صفحه ۲۱). ماشین حساب در اینجا مرجع قدرت است. در کتاب هشتم، عکس رابطه فیثاغورث درست فرض شده است، بدون آنکه دلیلی برای درستی آن آورده شود. در اینجا کتاب، به‌عنوان مرجع قدرت عمل می‌کند (کتاب ریاضی هشتم، صفحه ۸۵).

۲. قیاس کیفی: نمونه این استدلال در هیچ یک از دو کتاب دیده نشد. مثالی از استیسی و وینسنت (۲۰۰۹) برای توضیح آن آورده می‌شود. برای توضیح ضرب اعداد صحیح، حرکت جلو و عقب فیلم (عامل اول) از یک تانکرِ آبی که شیر ورودی و خروجی آب (عامل دوم) دارد را در نظر بگیرید. چنین قیاسی در تعیین علامت حاصل‌ضرب اعداد صحیح به دانش‌آموزان کمک می‌کند، در حالی که ارتباط ریاضی میان کمیت‌ها و عملگرها روشن نمی‌شود؛ بنابراین نمی‌توان اعتبار محاسبات را چک کرد. در این حالت فقط به یک شباهت ظاهری اشاره می‌شود تا یک شباهت ساختاری ریاضی. اگر ارتباط کمیت‌ها و عملگرها تبیین شود، می‌توان مدلی ارائه نمود که برای پیش‌بینی نتایج محاسبات به کار رود و در نتیجه استدلال ارائه شده، در سطح بالاتری خواهد بود.

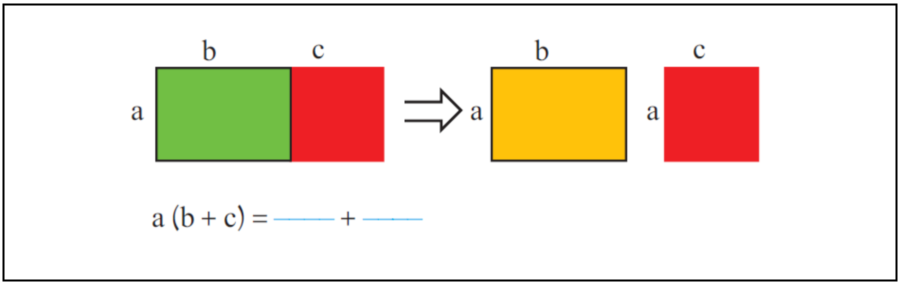
۳. هماهنگی یک قانون با یک مدل: نمونه این استدلال نیز در هیچ یک از دو کتاب دیده نشد. به‌عنوان مثال می‌توان برش و تقسیم یک شکل هندسی را به‌عنوان مدلی برای تقسیم اعداد کسری در نظر گرفت (استیسی و وینسنت، ۲۰۰۹). مثلاً برای تقسیم ۱/۴÷ ۳/۴، می‌توان تعداد ربع دایره‌ها را در سه چهارم دایره به دست آورد. جوابی که از این مدل به دست می‌آید، با قانون تقسیم کسرها (برعکس کردن کسر دوم و تبدیل تقسیم به ضرب) هماهنگ است. در این سطح از استدلال، تلاشی برای برقراری ارتباط میان مدل و قانون نمی‌شود. هرچند به طور کلی امکان استنتاج قانون از مدل وجود دارد، به‌خصوص در مورد این مثال به سادگی قانون تقسیم

کسرها به‌وسیله این مدل قابل توجیه است. در صورتی که دانش‌آموزان ارتباط ساختاری میان قانون و مدل را ببینند، استدلال در سطح بالاتر «استنتاج با استفاده از یک مدل» خواهد بود.

۴. نمایش آزمایشی: در این حالت درستی یک یا چند نمونه عددی یا فیزیکی بررسی می‌شود. برای مثال در کتاب هفتم، دانش‌آموزان برای پیدا کردن روابط بین پاره‌خط‌ها در یک مثلث (صورت‌بندی قضیه حمار) از دو مثلث استفاده می‌کنند (کتاب ریاضی هفتم، صفحه ۴۲). در کتاب هشتم برای پیدا کردن خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع، از کاغذ پوستی روی یک مثال استفاده شده است (کتاب ریاضی هشتم، صفحه ۳۸).

۵. استنتاج با استفاده از مثال: همان‌طور که گفته شد این دسته شامل مثال‌های نقض و اثبات‌های خاص است. در مثال نقض، با استفاده از یک مثال درستی یک گزاره کلی رد می‌شود و در اثبات خاص، درستی یک گزاره خاص (گزاره‌ای که منحصر به یک مورد خاص و اغلب شامل مقدارهای عددی است) تأیید می‌شود. در بخش قبل برای این مورد مثال آورده شد (شکل شماره ۲ را ملاحظه فرمایید).

۶. استنتاج با استفاده از مدل: در این سطح، یک قانون (گزاره کلی) توسط یک مدل توجیه می‌شود، به طوری که ارتباط ساختاری میان رفتار مدل و قانون وجود دارد. این مدل، می‌تواند در قالب یک تصویر، یک موقعیت، یا اشیاء واقعی ظاهر شود. در کتاب هشتم برای توجیه خاصیت توزیع‌پذیری ضرب روی جمع، از مدل مساحت مستطیل استفاده شده است:

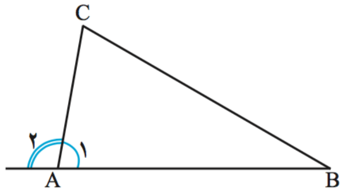


شکل ۳: مثالی از یک مدل تصویری (کتاب ریاضی هشتم، صفحه ۵۳)

۷. استنتاج با استفاده از یک حالت خاص: در این حالت درستی گزاره مورد نظر در یک مثالِ عام استنتاج می‌شود. برای نمونه، در کتاب هشتم برای توجیه قانون تقسیم دو عدد توان‌دار با پایه‌های مساوی از مثال عام استفاده و سپس قانون استنتاج شده است (کتاب ریاضی هشتم، صفحه ۱۰۶).

۸. استنتاج با استفاده از یک حالت کلی: برای نشان دادن درستی یک گزاره کلی، زنجیره‌ای از استدلال‌ها ارائه می‌شود که ضمانت درستی آن‌ها، دانش و تعاریف قبلی و استفاده صحیح از قوانین منطقی است. استیسی و وینسنت (۲۰۰۹) تفاوت این سطح را با اثبات صوری در این می‌دانند که در اینجا استدلال استنتاجی خارج از یک دستگاه اصل موضوعه انجام می‌شود.

در کتاب‌های درسی ریاضی ایران، کتاب هفتم اولین جایی است که *استنتاج با استفاده از یک حالت کلی* آورده می‌شود. احتمالاً خوانندگان با این استدلال، بیش از سایر موارد آشنایی دارند. با این حال برای مثال می‌توان از روند استنتاجیِ اثبات گزاره هندسی زیر در کتاب هشتم (ص ۴۷) یاد کرد: «در هر مثلث، اندازه زاویه خارجی برابر با مجموع دو زاویه غیرمجاور آن است.»



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1+\hat{A}_2=180^\circ\\ \hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_2=\hat{B}+\hat{C}$$

شکل ۴: مثالی از یک استنتاج با استفاده از یک حالت کلی (کتاب ریاضی هشتم، صفحه ۴۷)

۳- فراوانی و توزیع انواع استدلال در فصول کتاب‌های هفتم و هشتم

سؤال دوم پژوهش در مورد توزیع انواع استدلال در فصول مختلف دو کتاب مذکور بود. جزئیات یافته‌های حاصل از کدگذاری در جداول شماره ۲ و ۳ به تفکیک فصل، برای هر کتاب آمده است. به طور کلی می‌توان گفت با توجه به اینکه رویکرد کتاب مسئله محور است،

همان طور که انتظار می‌رفت استدلال‌های «ارجاع به مرجع قدرت» در هر یک از دو کتاب کمتر دیده شدند.

در مسائل دو کتاب، مؤلفان کتاب درسی، رویکرد، تکنیک و ابزار استدلال را برای دانش‌آموزان فراهم کرده‌اند. به این ترتیب سطح استدلال مورد انتظار برای هر سؤال تا حد زیادی مشخص است. همان طور که در روش‌شناسی ذکر شد، موافقت کدگذاران در ۸۹ درصد موارد ثبت شد که اعتبار لازم را فراهم می‌کند. بر سر موارد اختلاف نیز، با بحث در مورد چارچوب نظری و محتوای درس در نهایت توافق حاصل می‌شد.

جدول ۲: توزیع انواع استدلال در فصل‌های کتاب پایه هفتم (کل واحدهای تحلیل در کتاب ۵۲۵ عدد)

کل کتاب	آمار و احتمال	بردار و مختصات	توان و جذر	سطح و حجم	شمارنده‌ها و اعداد اول	هندسه و استدلال	جبر و معادله	عددهای صحیح	
۴	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۲	ارجاع به مرجع قدرت
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	قیاس کیفی
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	هماهنگی قانون با مدل
۱۷	۲	۰	۱	۲	۱	۷	۲	۲	نمایش آزمایشی
۲۱	۰	۰	۳	۱	۱۰	۳	۲	۲	استنتاج با استفاده از مثال
۲۰	۲	۶	۰	۰	۰	۱	۵	۶	استنتاج با استفاده از یک مدل
۱۸	۰	۱	۵	۴	۴	۱	۰	۳	استنتاج با استفاده از یک حالت خاص
۱۶	۴	۱	۰	۰	۳	۷	۱	۰	استنتاج با استفاده از یک حالت کلی
۷۵	**۶**	**۸**	**۸**	**۵**	**۱۷**	**۱۲**	**۸**	**۱۱**	**مجموع استدلال‌های استنتاجی**

در کتاب هفتم، تمرکز «استنتاج با استفاده از یک حالت کلی» در فصل هندسه و استدلال است، در سه فصل (عددهای صحیح، سطح و حجم، توان و جذر)، به کلی دیده نمی‌شود. در مجموع، فصل شمارنده‌ها و اعداد اول، استدلال‌های استنتاجی بیشتری نسبت به همه فصل‌ها دارد. در این فصل، تمرکز فعالیت‌های اثبات–محور بر مسائل عددی و گزاره‌های خاص است. این رویکرد آموزشی می‌تواند برای دانش‌آموزان این پایه مناسب باشد، چون آن‌ها برای بیان تعمیم‌های خود در حالت کلی هنوز به اندازه کافی تعلیم ندیده‌اند و تمرین نکرده‌اند؛ حتی اغلب، ابزار کافی در دسترس ندارند.

جدول ۳: توزیع انواع استدلال در فصل‌های کتاب پایه هشتم (کل واحدهای تحلیل در کتاب ۵۵۷ عدد)

کل کتاب	دایره	آمار و احتمالات	توان و جذر	مثلث	بردار و مختصات	جبر و معادله	چند ضلعی‌ها	حساب عددهای طبیعی	عددهای صحیح و گویا	
۷	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۲	۰	۲	ارجاع به مرجع قدرت
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	قیاس کیفی
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	هماهنگی قانون با مدل
۳۰	۲	۲	۲	۵	۱	۳	۱۱	۳	۱	نمایش آزمایشی
۲۷	۲	۴	۱	۵	۴	۱	۰	۴	۶	استنتاج با استفاده از مثال
۷	۰	۰	۰	۲	۲	۲	۰	۰	۱	استنتاج با استفاده از یک مدل
۱۳	۰	۱	۳	۲	۰	۱	۲	۲	۲	استنتاج با استفاده از یک حالت خاص
۵۹	۱۳	۲	۰	۱۵	۱	۹	۱۴	۳	۲	استنتاج با استفاده از یک حالت کلی
۱۰۶	**۱۵**	**۷**	**۴**	**۲۴**	**۷**	**۱۳**	**۱۶**	**۹**	**۱۱**	**مجموع استدلال‌های استنتاجی**

در کتاب هشتم، کمترین توجهِ به تصدیق و توضیح گزاره‌ها، مربوط به فصل توان و جذر است؛ تنها ۶ مورد اثباتی در این فصل دیده می‌شود. در حالی که بیشترین میزان استنتاج موجود در کتاب هشتم در محتوای هندسی دیده می‌شود (مثلث، چندضلعی‌ها و دایره). این یافته همسو با این نگاه سنتی است که «اگر تعلیم و تربیت عمومی درصدد ارزانی داشتن اندیشه نظام منطقی به دانشجویان [و دانش‌آموزان] است، باید در آن، مقام خاصی برای استدلال هندسی در نظر گرفته شود» (پولیا، ۱۹۴۵؛ ترجمه آرام، ۱۳۸۶، ص ۳۹)؛ اما این نگاه نیز تماماً اجرا نشده است؛ به طوری که در فصل چندضلعی‌ها، ۴۴ درصد از ۲۹ مسئله اثباتی، بدون استفاده از استدلال استنتاجی تأیید می‌شوند.

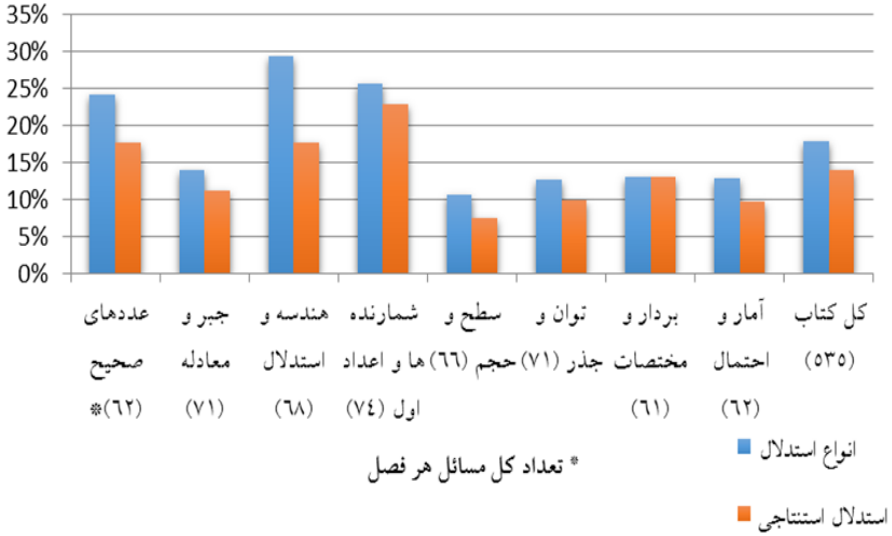
تعداد واحدهای تحلیل در هر دو کتاب تفاوت چندانی ندارند (هفتم ۵۳۵ واحد، هشتم ۵۵۷ واحد)، بنابراین مقایسه برخی از یافته‌ها میان آن‌ها، با در نظر داشتن تفاوت سنی و درنتیجه رشد شناختی دانش‌آموزان منطقی به نظر می‌رسد. برخلاف انتظار تعداد واحدهای نمایش آزمایشی در کتاب هشتم نه تنها کمتر نیست بلکه نسبت به کتاب هفتم از ۱۷ مورد به ۳۰ مورد افزایش یافته است. این در حالی است که دانش‌آموزان پایه هشتم، دانش و مهارت بیشتری نسبت به سال گذشته دارند. رویکرد کتاب درسی باید به‌گونه‌ای باشد که دانش‌آموزان به تدریج متوجه شوند «نمایش آزمایشی»، استدلال معتبری برای تأیید درستی یک گزاره نیست و نیاز به استدلال استنتاجی الزامی است. نکته دیگری که در این ارتباط در جدول ۲ و ۳ خودنمایی می‌کند مربوط به تعداد اندک «ارجاع به مرجع قدرت» است. ساختار کتاب به گونه‌ای طراحی شده است که دانش‌آموز در مورد درستی گزاره‌های مطرح شده، بتواند به اطمینان درونی برسد. هم‌چنین، جای بسی خرسندی است که جای دو سطح «قیاس کیفی» و «هماهنگی قانون با مدل» در این دو کتاب خالی است. همان طور که در بخش قبل گفته شد، در این دو سطح، دانش‌آموز ساختار ریاضیِ موجود در مسئله را نمی‌بیند و صرفاً به حفظ کردنِ یک ارتباط ظاهری بسنده می‌کند و قسمت عمده‌ای از معنا را از دست می‌دهد.

با توجه به اهمیت استدلال استنتاجی به طور خاص به آن می‌پردازیم. سطر آخر جدول‌های ۲ و ۳ میزان فراوانی استدلال استنتاجی را در فصول مختلف هر دو کتاب نشان می‌دهد. در مجموع توزیع انواع استدلال استنتاجی در فصول کتاب هفتم و هشتم یک دست و یکنواخت

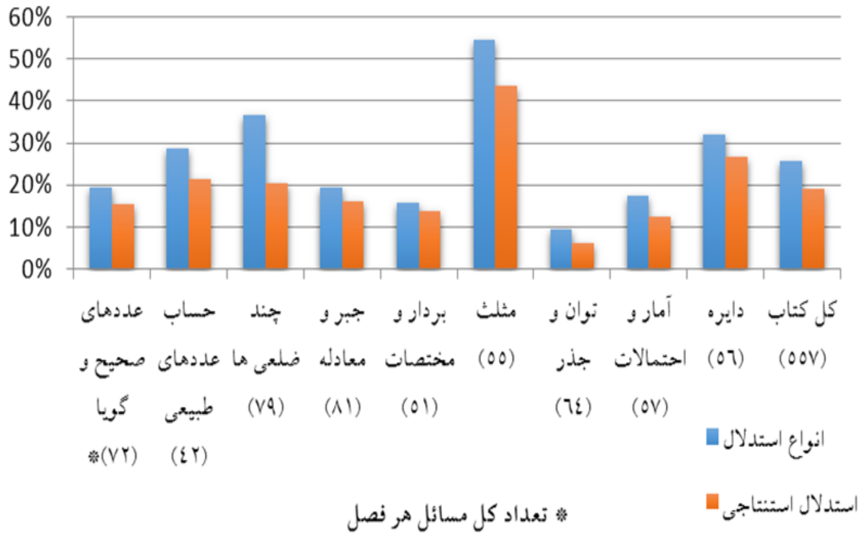
نیست. در کتاب هفتم، انواع استنتاج به کار رفته بسته به محتوای فصل متغیر می‌باشد، هرچند که تعداد هر یک از چهار دسته استنتاج در کل کتاب تقریباً برابر است؛ اما این مسئله در کتاب هشتم به گونه‌ای دیگر است. میزان استدلال‌های استنتاجی با استفاده از مثال عام و مدل، در کتاب هشتم کاسته شده، ولی استنتاج در حالت کلی به یک باره چند برابر شده است. توزیع استدلال استنتاجی در فصول مختلف کتاب هشتم یک دست و یکنواخت نیست. تا جایی که به نظر می‌رسد هر فصل از کتاب توسط یک نفر تألیف شده و در نهایت فقط در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. چرا که در نوع نگاه و اهداف آن‌ها از لحاظ استدلالی، تفاوت‌های چشم‌گیری دیده می‌شود. بیشترین میزان استنتاج موجود در کتاب هشتم در محتوای هندسی دیده می‌شود (فصل‌های چند ضلعی‌ها، مثلث و دایره). نکته غیرمنتظره فقر استنتاجی فصل‌های مربوط به محتوای حسابی و آمار و احتمالات است؛ اما باید در نظر داشت که:

استدلال و اثبات را نمی‌توان به سادگی در قالب یک واحد درسی مثلاً منطق، یا در خلال اثبات‌های هندسی یاد گرفت ... آن‌ها باید جزء مستمری از تجارب ریاضی دانش‌آموزان در تمامی پایه‌ها، از پیش‌دبستانی تا پایان پایه ۱۲ باشند. استدلال ریاضی‌وار یک عادت ذهنی است و مانند همه عادت‌ها، باید از طریق استفاده‌ی مستمر در زمینه‌های متعدد رشد نماید (شورای ملی معلمان ریاضی، ۲۰۰۰، ص ۵۶).

در پاسخ به سؤال آخر مطالعه حاضر، یعنی درصد محتوای اختصاص یافته به اثبات یک گزاره ریاضی، با استفاده از نمودارهای شماره ۱ و ۲ می‌توان گفت: ۱۷ درصد از واحدهای تحلیل در کتاب هفتم، به اثبات تخصیص یافته است. هم‌راستای بحث‌هایی که در بخش قبل انجام شد، این میزان در کتاب هشتم به ۲۵ درصد افزایش می‌یابد. به طور خاص، درصد استدلال‌های استنتاجی از کتاب هفتم به کتاب هشتم، از ۱۴ درصد به ۱۹ درصد رسیده است. این نشان می‌دهد استدلال‌های غیراستنتاجی در کتاب هشتم نسبت به سال قبل بیشتر می‌شود (از سه درصد به شش درصد می‌رسد). در نمودارهای شماره ۱ و ۲، درصد واحدهای شناسایی شده به تفکیک فصل‌های کتاب فراهم شده است.



نمودار ۱: درصد واحدهای تخصیص یافته به تصدیق و توضیح یک گزاره به تفکیک فصل‌های کتاب هفتم



نمودار ۲: درصد واحدهای تخصیص یافته به تصدیق و توضیح یک گزاره به تفکیک فصل‌های کتاب هشتم

این دو نمودار کاملاً گویای این مطلب است که کتاب‌های درسی هر دو پایه، هندسه را محمل اصلی استدلال قرار داده‌اند. هر چند که فصل سطح و حجم در کتاب هفتم از این قاعده مستثنی بوده و رویکرد ارائه مطالب در این فصل سمت و سوی اندازه‌گیری و محاسبه دارد تا استدلال و استنتاج. تا به اینجا به تفکیک، سؤالات پژوهش پاسخ داده شدند. در بخش آخر سعی می‌کنیم با نگاه کلی‌تری در مورد آن‌ها بحث کنیم.

بحث و نتیجه‌گیری

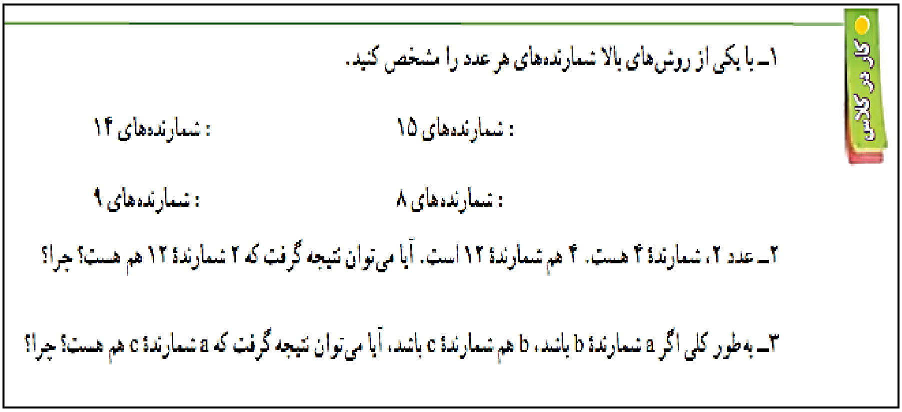
همان طور که پیش از این ذکر شد، در ریاضیات مدرسه‌ای به دلایل آموزشی، حضور استدلال‌های غیراستنتاجی می‌تواند قابل توجیه باشد، اما نه همیشه و در هر شرایطی. دانش‌آموزان دوره متوسطه اول، در حالی که الگویابی می‌کنند و در مورد تعمیم‌های ممکن حدسیه‌سازی می‌کنند، به تدریج باید یاد بگیرند که درستی حدس‌های خود را به روشی معتبر بررسی کنند. این مسئله در مورد ادعای دیگران نیز صدق می‌کند. دانش‌آموزان به تدریج فرا می‌گیرند، راه‌حل‌های همکلاسی‌های خود را ارزیابی و درستی دعاوی آن‌ها را به روش استنتاجی بررسی کنند. حتی برای قوانینی که از زبان معلم می‌شنوند یا در کتاب درسی می‌خوانند، به دنبال دلیل باشند و این عادت ذهنی را حتی فراتر از کلاس درس ریاضی ببرند.

هر کسی که تجربه تدریس در کلاس درس ریاضی داشته باشد، به‌خوبی می‌داند که این تغییر نگاه، به این آسانی که در چند سطر قبل در مورد آن قلم فرسایی کردیم، اتفاق نمی‌افتد! نیازمند شناخت فرایند و نیازسنجی برای هر مرحله آن است. اهمیت و نقش استدلال استقرایی در حدسیه سازی و تعمیم، بر هیچ ریاضی خوانده‌ای پنهان نیست ولی جمع‌بندی نتایج تحقیقات متعددی توسط رید و کنیپینگ (۲۰۱۰) نشان می‌دهد بین ۲۰ تا ۸۰ تا درصد دانش‌آموزان و معلمان (بسته به سن و پیشینه ریاضی آن‌ها)، یک مجموعه مثال را برای تأیید درستی یک گزاره کافی می‌دانند. طراحی فعالیت‌هایی که این عدم کفایت را نشان دهد و گنجاندن آن‌ها در کتاب درسی دوره متوسطه اول، می‌تواند راه‌گشا باشد.

تا به این‌جای مقاله، انواع استدلال‌های مطرح شده در کتاب‌های درسی ریاضی هفتم و هشتم و میزان حضور آن‌ها به تفکیک فصل بیان شد. صرف نظر از استدلال «ارجاع به مرجع

قدرت»، دیگر انواع استدلال در دو دسته عمده‌ی استدلال‌های استقرایی و استنتاجی قرار داشتند که از لحاظ میزان اعتبار نتایج‌شان با یکدیگر متفاوت هستند. زمانی که به دانش‌آموزی یاد می‌دهیم استدلال استقرایی برای تصدیق و بررسی درستی یک گزاره کافی نیست، لازم است ابزار دیگری که متناسب سن و دانش او است، برایش فراهم کنیم و به تدریج آن‌ها را با ابزاری که دقت بیشتری دارند، جایگزین کنیم. چون ممکن است برخی از سطوح بالای استدلال استنتاجی برای دانش‌آموز معنادار نباشد و نتوانند آن‌ها را درک کنند. به گفته ریید و کنیپینیگ (۲۰۱۰) اثبات‌های استنتاجی برای برخی از دانش‌آموزان قانع کننده نیست و آن‌ها نمی‌توانند درستی گزاره استنتاج شده را به این واسطه بپذیرند.

یکی از موقعیت‌هایی که برای تغییر استدلال از استقرا به استنتاج وجود دارد، ساخت مثال عام است. در کتاب‌های تحلیل شده در این مطالعه، بارها فعالیت‌هایی گنجانده شده که یک مثال، برای دانش‌آموزان عام شود. به نظر نویسندگان این مقاله، برخی مناسب هستند ولی برخی در رسیدن به هدف خود عقیم مانده‌اند. مثال بعدی می‌تواند منظور را بیشتر نشان دهد:


کار در کلاس

۱ـ با یکی از روش‌های بالا شمارنده‌های هر عدد را مشخص کنید.

شمارنده‌های ۱۵ :　　　شمارنده‌های ۱۴ :

شمارنده‌های ۸ :　　　شمارنده‌های ۹ :

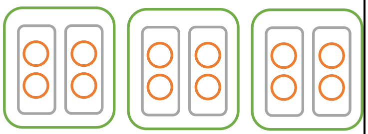
۲ـ عدد ۲، شمارندهٔ ۴ هست. ۴ هم شمارندهٔ ۱۲ است. آیا می‌توان نتیجه گرفت که ۲ شمارندهٔ ۱۲ هم هست؟ چرا؟

۳ـ به‌طور کلی اگر a شمارندهٔ b باشد، b هم شمارندهٔ c باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت که a شمارندهٔ c هم هست؟ چرا؟

شکل ۵: مثالی از نقش میانجی مثال عام برای حرکت از استقرا به استنتاج (کتاب ریاضی هفتم، صفحه ۵۶)

زمانی که دانش‌آموز در کتاب با این «کار در کلاس» روبرو می‌شود، فقط با مفهوم شمارنده و سه روش برای پیدا کردن آن آشنا شده است. روش‌ها عبارت‌اند از نوشتن ضرب، پیدا کردن تقسیم، یا رسم شکل. این در حالی است که قوانین مربوط به شمارنده‌ها را نمی‌داند. به نظر

می‌رسد که مؤلف انتظار دارد دانش‌آموز برای سؤال ۲، استدلال استنتاجی بیاورد و در نتیجه‌ی آن، ساختار استدلالی در سؤال ۳ را پیدا کرده و متوجه شود که شمارنده‌ی هر عدد، آن عدد را نیز می‌شمارد. با توجه به ابزارها و روش‌هایی که کتاب برای دانش‌آموز فراهم می‌کند، اگر بخواهد به روش استنتاجی به سؤال ۲ پاسخ دهد، احتمالاً یکی از راه‌حل‌های زیر را طی می‌کند. در این صورت با توجه به اینکه در این سؤال درستی یک گزاره خاص تصدیق می‌شود، حاصل یک «اثبات خاص» خواهد بود.

راه‌حل اول: ۴ = ۲ × ۲ , ۱۲ = ۳ × ۴ ۱۲ = ۳ × (۲ × ۲) = ۶ × ۲ یعنی شش دسته ۲ تایی پس ۲ شمارنده ۱۲ است.	**راه‌حل دوم:** ۴ ÷ ۲ = ۲ , ۱۲ ÷ ۴ = ۳ ۱۲ ÷ ۲ = ۳ × ۲ = ۶ یعنی ۱۲ را می‌توان ۲ تا ۲ تا شمرد. پس ۲ شمارنده ۱۲ است.
راه‌حل سوم:  یعنی ۱۲ را می‌توان ۲ تا ۲ تا شمرد. پس ۲ شمارنده ۱۲ است.	**راه‌حل چهارم** (هر یک از روش‌های قبلی را فقط به صورت کلامی توضیح دهد): ۱۲ را می‌توان ۴ تا ۴ تا شمرد، هر دسته ۴ تایی را هم می‌توان ۲ تا ۲ تا شمرد. پس ۱۲ را نیز می‌توان ۲ تا ۲ تا شمرد.

شکل ۶: چهار راه‌حل استنتاجی برای سؤال ۲، کار در کلاس صفحه ۵۶، کتاب هفتم

راه‌حل‌های فوق با توجه به ابزاری که کتاب برای دانش‌آموز پیش از طرح این سؤال فراهم کرده، در نظر گرفته شده‌اند، درصورتی که در عمل انتظار نمی‌رود دانش‌آموز از روش دوم استفاده کند. هر چند که اوضاع به نفع راه‌حل‌های دیگر هم نیست! فکر می‌کنید دانش‌آموزان در این شرایط چگونه عمل می‌کنند؟ تجربه تدریس نویسندگان می‌گوید، آن‌ها بدون توجه به دو گزاره اول در سؤال (۲)، نتیجه بگیرند که ۲ شمارنده ۱۲ است. چون می‌دانند که ۱۲

مضرب ۲ است و یا ۱۲ بر ۲ بخش‌پذیر است؛ در فعالیت قبل نیز رابطه مضرب، بخش‌پذیری و شمارنده بودن را یاد گرفته‌اند، پس نتیجه می‌گیرند ۲ شمارنده ۱۲ است. درگیر شدن دانش‌آموز در یک فرایند استنتاجی که حتی لزوم آن هم برایشان واضح نیست، بعید به نظر می‌رسد. در این شرایط در نقش یک معلم چه باید کرد؟ آیا باید دانسته‌های دانش‌آموزان را زیر سؤال برده و آن‌ها را وادار به دیدن ساختاری کند که در اعداد ۲، ۴ و ۱۲، واقعاً پنهان شده است؟ یا بپذیریم این اعداد نمایندگان خوبی برای نشان دادن این ساختار نیستند؟

حالا موقعیتی را فرض کنید که به‌ندرت اتفاق می‌افتد. دانش‌آموز به یکی از روش‌های استنتاجی فوق (شکل شماره ۶) عمل می‌کند. این بار انتظار دارید چه پاسخی به سؤال بعدیِ کار در کلاس یعنی سؤال ۳ بدهد. آیا فکر می‌کنید پاسخ سؤال ۲، اثبات عامی برای این سؤال خواهد بود و دانش‌آموز کار سختی در پیش ندارد؟ مثلاً آیا قرار است مقادیر عددی روش اول را با متغیرهای داده شده در سؤال و چند متغیر کمکی دیگر جایگزین کند؟ آیا عبارت جبری حاصل را می‌تواند تفسیر کند؟ شاید بهتر است به سراغ روش کلامی (روش چهارم) برود و این بار اعداد را فقط با متغیرهای داده شده در سؤال جایگزین کند. به عبارت «c را می‌توان b تا b تا شمرد» توجه کنید. یا شاید بتوان ساده‌تر گفت «c را می‌توان به دسته‌های b تایی تقسیم کرد». واقعاً چقدر این عبارات برای دانش‌آموز معنادار است؟ خروجی این روند، استدلالی است که نمادها به خودی خود، نماینده چیزی نیستند و هرگاه اتصال آن‌ها با مثال قطع شود، همان اندک معنا هم از دست خواهد رفت. اگر هنوز اندکی امید دارید به سراغ راه‌حل سوم بروید و سعی کنید آن را در حالت کلی و تعداد دلخواه دایره رسم کنید. توجه کنید که نماد «...» بارها در شکل ظاهر می‌شود. نقش پیچیده و گیج کننده این نماد را دست کم نگیرید. خلاصه اینکه آیا دانش‌آموز در این پایه و تا به اینجا، برای قرار گرفتن در چنین سطحی از تعمیم و تجرید آماده شده است؟

نکته مهمی که در اینجا باید به آن توجه شود این است که اگر فردی، ابتدا درستی یک گزاره کلی را در یک فرایند استنتاجی ببیند و ساختار موجود را انتزاع نماید، در این صورت هر مثالی ممکن است برای این شخص، عام باشد، در صورتی که برای دانش‌آموزان چنین

نیست. حال اگر چنین فردی در مقام معلم یا طراح یک فعالیت قرار گرفت باید به چالش‌هایی که در انتخاب مثال عام وجود دارد دقت کند.

در انتهای نوشتار حاضر یادآور می‌شویم که دانش‌آموزان مشکلات جدی در درک و انجام اثبات و استدلال دارند (هارل و سودر، ۱۹۹۸؛ هیلی و هویلز، ۲۰۰۰؛ ریید و کنیپینگ، ۲۰۱۰؛ بویل و همکاران، ۲۰۱۵؛ باقری، ۱۳۸۸، ریحانی، حمیدی و کلاهدوز، ۱۳۹۱). جمعاً روندهای تحقیقاتی مختلف در این مورد، مشکلات دانش‌آموزان را بیشتر مربوط به تدریس می‌دانند تا به محدودیت‌های رشد شناختی دانش‌آموزان (استیلیانیدز[1]، ۲۰۱۴). در چنین شرایطی در کنار بحث توسعه حرفه‌ای معلمان، بازاندیشی در محتوای کتاب درسی نیز می‌تواند در بهبود شرایط کمک نماید. در پایان پیشنهاد می‌شود نکات مطرح شده در این مطالعه، در تحقیقات کیفی با جزئیات و عمق بیشتری بررسی شود و از آنجا که این مطالعه فقط بر کتاب درسی متمرکز بود، دانش‌آموزان و معلمان نیز شرکت داده شوند.

منابع

اصلاح‌پذیر، بهمن؛ ایرانمنش، علی؛ بیژن‌زاده، محمدحسن؛ داودی، خسرو؛ رستگار، آرش؛ ریحانی، ابراهیم؛ شاهورانی، احمد؛ عالمیان، وحید؛ نائینی، سید محمد کاظم. (۱۳۹۳). *ریاضی پایه هفتم دوره اول متوسطه*. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

امیری، حمیدرضا؛ پندی، زهره؛ خسرو آبادی، حسین؛ داودی، خسرو؛ ریحانی، ابراهیم؛ سیدصالحی، محمدرضا؛ صدر، میرشهرام. (۱۳۹۳). *ریاضی پایه* هشتم *دوره اول متوسطه*. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

باقری طاقانکی، حسین. (۱۳۸۸). *درک و فهم دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان از اثبات*. پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی، تهران.

پولیا، جورج. (۱۹۴۵). *چگونه مسئله را حل کنیم*. ترجمه احمد آرام. (۱۳۸۶). چاپ هشتم. تهران: کیهان.

1. Stylianides

دبیرخانه طرح تولید برنامه درسی (اردیبهشت ۱۳۸۹). *برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران*، نگاشت سوم، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، تهران.

ریحانی، ابراهیم؛ حمیدی، فریده؛ کلاهدوز، فهیمه. (۱۳۹۱). بررسی درک و فهم دانش‌آموزان سال دوم متوسطه از استدلال و اثبات ریاضی. *فصلنامه مطالعات برنامه درسی ایران*. سال ششم، شماره ۲۴، ۱۵۷-۱۸۲.

عالمیان، وحید. (۱۳۹۲/۹/۲). *پایگاه جامع اطلاع رسانی وزارت آموزش و پرورش*. بازیابی در تاریخ ۱۳۹۲/۱۱/۲۵.

http://www.medu.ir/Portal/Home/ShowPage.aspx?Object=NEWS&CategoryID=0bbba183-3a41-491e-96f6-32d0ab7cbf63&LayoutID=f3dfcd40-91f4-4fa0-9d37-6e3160920d34&ID=6e36585a-7182-4645-8773-6c41c588296c

گال، مردیت؛ بورگ، والتر؛ گال، جویس. (۱۹۹۶). *روش‌های تحقیق کمی و کیفی در علوم تربیتی و روانشناسی*. ترجمه‌ی احمدرضا اصفهانی و همکاران. (۱۳۸۲). چاپ پنجم (۱۳۸۹). تهران: نشر دانشگاه شهید بهشتی و سازمان مطالعه وتدوین کتب علوم انسانی دانشگاهی (سمت).

لاکاتوش، ایمره. (۱۹۷۸). *اثبات ریاضی چیست؟* ترجمه شاپور اعتماد. (۱۳۸۷). در مجموعه مقالات دیدگاه‌ها و برهان‌ها. چاپ دوم. تهران: نشر مرکز.

Ball, D.L. Hoyles, C., Jahnke, H.N. and Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In L.I. Tatsien (ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. III, Higher Education Press, Beijing, pp. 907–920.

Blum, W., & Kirsch, A. (1991). Preformal proof: examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics*, 22(2), 183–203.

Boyle, J. D., Bleiler, S. K., Yee, S. P., & Yi-Yin (Winnie) Ko. (2015). Transforming perceptions of proof: A four-part instructional sequence. *Mathematics Teacher Educator*, 4(1), 32-70.

Hanna, G. (2014). Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning. In S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer Science and Business Media Dordrecht, pp. 404-408.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education. III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Healy, L. and Hoyles, C. (2000). Proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*. 31(4): 396–428.

Kilpatrick, J. (2014). From clay tablet to computer tablet: The evolution of school mathematics textbooks. In K. Jones, C. Bokhove, G. Howson, & L. Fab (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbooks Research and Development (ICMT)* (pp. 3–12). Southampton: Southampton Education School, University of Southampton.

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: an introduction to its methodology (2nd Ed.).* Thousand Oaks, CA: Sage.

Mullis, I.V.S., Martin, M.O., & Foy, P. (with Olson, J.F., Preuschoff, C., Erberber, E., Arora, A., & Galia, J.). (2008). *TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA’s Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades.* Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics, National Council of Teachers of Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Reid, D. & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: research, learning and teaching.* Rotterdam: Sense.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Falmer.

Stacey, K., & Vincent, J. (2009). Modes of reasoning in explanation in Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 72: 271-288.

Stylianides, G. J. (2014). Textbook analyses on reasoning-and-proving: Significance and methodological challenges. *International Journal of Educational Research*. 64, 63-70.

Thomson, D., Senk, S. & Johnson, G. (2012). Opportunities to Learn Reasoning and Proof in High School Mathematics Textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 43, No. 3, 253–295.

Vincent, J., & Stacey, K. (2008). Do Mathematics textbooks cultivate shallow teaching? Appling the TIMSS Video Study criteria to Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Mathematics Education Research Journal*. Vol. 20, No. 1, 82-107.